

ÜBER DIE SCATTERINGMATRIX ELLIPTISCHER MODULGRUPPEN

ULRICH CHRISTIAN

§0. Einleitung. Für Hauptkongruenzgruppen $M(q)$ der Stufe q zur elliptischen Modulgruppe $M(1)$ und Eisensteinreihen vom Gewicht 0 hat Efrat [8] die Determinante $\phi(q, 0, s)$ der aus den nullten Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen hervorgehenden Scatteringmatrix $\Phi(q, 0, s)$ berechnet. In der vorliegenden Arbeit werden wir diese Resultate wie folgt verallgemeinern und weiterführen. Wir lassen bei den Eisensteinreihen ganzzahlige Gewichte g zu, was auf die Scatteringmatrix $\Phi(q, g, s)$ und deren Determinante $\phi(q, g, s)$ führt. Wir berechnen $\phi(q, g, s)$ wie bei Efrat [8]. Die im Zähler auftretende Funktion wird aber darüberhinaus durch Dirichletsche L -Reihen dargestellt. Wir drücken Zähler und Nenner durch die aus der analytischen Zahlentheorie bekannten Funktionen $\xi(\chi, s)$ aus, wobei χ ein Dirichletcharakter ist. Dadurch gelingt es, die Lage und Anzahl der Pol- und Nullstellen von $\phi(q, g, s)$ genau zu beschreiben.

Es sei $p(q)$ die Anzahl der inäquivalenten Spitzen eines Fundamentalbereichs von $M(q)$ und $\mathfrak{N}(q, g, T)$ die Anzahl der Polstellen von $\phi(q, g, s)$ im Halbkreis $|s| \leq T$, $\text{Im } s > 0$. Wir zeigen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T) &= \frac{p(q)}{\pi} T \log T + o(T) \quad (T \rightarrow \infty) \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{-T}^T \frac{\phi'}{\phi} \left(q, g, \frac{1}{2} + it \right) dt = \frac{p(q)}{\pi} T \log T + o(T) \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Resultate können wir die in Christian [6] eingeführten Anzahlfunktionen $\mathfrak{N}(q, g, T)$ und $\mathfrak{M}(q, g, T)$ genauer bestimmen.

Schließlich untersuchen wir auch die Elemente der Scatteringmatrix $\Phi(q, g, s)$ auf Polstellen. Dabei finden wir ein auf andere Weise hergeleitetes Resultat aus Christian [4] wieder.

§1. Grundlagen. Es seien $q \in \mathbb{N}$, $g \in \mathbb{Z}$,

$$(1) \quad g^* = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (g \equiv 0 \pmod{2}) \\ 1 & (g \equiv 1 \pmod{2}) \end{array} \right\},$$

Received 27 February 1990. Revision received 16 May 1990.