Vol. 58, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © April 1989

GROUPE DE PICARD ET NOMBRES CARACTERISTIQUES DES VARIETES SPHERIQUES

MICHEL BRION

0. Introduction. De nombreux problèmes de géométrie énumérative concernent un espace homogène: par exemple les sous-espaces linéaires de dimension donnée d'un espace projectif, ou les quadriques non singulières. On cherche le nombre de points de cet espace qui satisfont à certaines conditions. Celles-ci peuvent être, pour un espace linéaire, d'avoir un contact d'ordre donné avec une courbe; pour une conique, de passer par un point ou d'être tangente à une droite ... Le théorème de transversalité de Kleiman [Kl1] a pemis de donner un sens à ces problèmes, qui reviennent à intersecter des translatés génériques de sous-variétés de l'espace homogène G/H. Ensuite, DeConcini et Procesi ont défini le groupe des conditions $C^*(G/H)$, muni du produit d'intersection [DP II]. Dans le cas où G/H est un espace *symétrique* (i.e. G est réductif, et H est le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif de G), ils ont muni le groupe $C^*(G/H)$ d'une structure (naturelle) d'anneau. Celui-ci est canoniquement isomorphe à une limite d'anneaux de Chow de compactifications G-équivariantes de G/H. Parmi ces compactifications, baptisées "variétés symétriques complètes", on en distingue une plus jolie que les autres. Pour l'espace symétrique des coniques dans le plan, il s'agit de la variété des "coniques complètes", dont la construction remonte à Chasles. DeConcini et Procesi ont donné un algorithme permettant de calculer les *nombres caractéristiques* de cette compactification canonique X, c'est-à-dire les nombres d'intersection des diviseurs de X [DP I]. En outre, ils ont décrit l'anneau de Chow (qui coïncide avec l'algèbre de cohomologie) de certaines variétés symétriques lisses et complètes [DP], [DGMP].

Le groupe des conditions d'une variété de drapeaux généralisée, c'est-à-dire d'un espace homogène complet G/H, est aussi isomorphe à l'anneau de Chow de G/H; ce dernier est bien connu, grâce au "calcul de Schubert". Variétés de drapeaux et variétés symétriques sont des cas particuliers de variétés appelées *sphériques*: dans elles opère un groupe réductif G, dont un sous-groupe de Borel a une orbite ouverte. La géométrie algébrique classique fournit d'autres exemples de variétés sphériques, ni symétriques ni homogènes complètes: citons les coniques dans un espace projectif de dimension n, les variétés déterminantielles ... Pour tout espace homogène sphérique G/H, le groupe $C^*(G/H)$ est encore muni d'une structure d'anneau, canoniquement isomorphe à une limite d'anneaux de Chow de G-compactifications de G/H: en effet la démonstration de [DP II] se transcrit sans changement. Un problème naturel est donc décrire l'algèbre de cohomologie d'une variété sphérique (lisse, complète).

Received March 9, 1988.