Vol. 53, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © September 1986

FORMULES LIMITES ET FORMULES ASYMPTOTIQUES POUR LES MULTIPLICITES DANS $L^2(G/\Gamma)$

PATRICK DELORME

0. Introduction. Soit G un groupe de Lie semisimple connexe linéaire. Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G. Si Γ est un sous-groupe discret cocompact sans torsion de G, on note r_Γ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G/\Gamma)$. Il est bien connu que cette représentation se décompose en une somme hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de G. Pour $\pi \in \hat{G}$, le nombre de fois où π apparait dans r_Γ sera noté $m(\pi, \Gamma)$.

Nous établissons le résultat suivant (th. 3.10) conjecturé par D. De George et N. Wallach (cf. [6], introduction):

Soit $(\Gamma_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes normaux et d'indices finis de Γ telle que $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} \Gamma_i = \{e\}$. On fixe une mesure de Haar sur G ce qui fixe pour tout i une mesure G-invariante sur G/Γ_i. Alors pour tout $S \subset \hat{G}$ ouvert relativement compact de $\hat{G}$ ou du dual réduit de G (pour la topologie de Fell), et régulier pour la mesure de Plancherel μ (i.e., $\mu(\bar{S}) = \mu(S)$), on a $\lim_{i \to \infty} \operatorname{vol}(G/\Gamma_i)^{-1} \Sigma_{\pi \in S} m(\pi, \Gamma_i) = \mu(S)$.

Dans le cas où S est réduit à une série discrète ou bien lorsque G est de rang 1, ces résultats sont dus à De George et Wallach ([6], [7]).

Dans la dernière partie on suppose en outre que G n'a qu'une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan. On note K un sous-groupe compact maximal de G et $P = MAN$ un sous-groupe parabolique minimal de G. Pour $(\delta, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ (où $\mathfrak{a} = \operatorname{Lie} A$), on note $\pi_{\delta,\lambda}$ la série principale de paramètres (δ, λ) et $\bar{\pi}_{\delta,\lambda}$ le sous-quotient irréductible de $\pi_{\delta,\lambda}$ contenant le K-type minimal de $\pi_{\delta,\lambda}$. Concernant les multiplicités $m(\pi_{\delta,\lambda}, \Gamma)$ nous démontrons (cf. th. 4.6 et th. 4.4):

Soit Ω un ouvert borné de $i\mathfrak{a}^*$ avec frontière régulière. Alors:

$$\sum_{\lambda \in t\Omega} m(\pi_{\delta,\lambda}, \Gamma) = \operatorname{vol}(G/\Gamma) C_\delta t^n + O(t^{n-d-1}),$$

où $n = \dim G/K$ et d est un entier supérieur ou égal à 2 et C_δ est une constante ne dépendant pas de Γ. En outre on a:

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^* - i\mathfrak{a}^*,\ \|\lambda\| \leqslant t} m(\bar{\pi}_{\delta,\lambda}, \Gamma) = O(t^{n-d-1}).$$

Dans le cas de la série principale sphérique, ce résultat est un cas particulier des résultats de J. Duistermaat, J. Kolk et V. Varadarajan ([12], §6, 7, 8), valables pour les séries principales sphériques sans supposer G à une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan. Les résultats de Duistermaat, Kolk et

Received April 30, 1985.