Vol. 52, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1985

FRONT D'ONDE ANALYTIQUE ET SOMMES DE CARRES DE CHAMPS DE VECTEURS

A. GRIGIS AND J. SJÖSTRAND

0. Introduction. Dans cet article, nous étudions le front d'onde analytique des solutions d'équations aux dérivées partielles, de la forme:

$$P = \sum_{j=1}^{d} X_j^2 \tag{0.1}$$

où X_j, $j = 1, \ldots, d$ sont des champs de vecteurs réels, à coefficients réels analytiques, définis dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$.

Un théorème bien connu d'Hörmander [7] dit que P est hypoelliptique C^∞ dans l'ouvert Ω s'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que la condition suivante, dite condition d'Hörmander, soit réalisée:

$$\begin{aligned}&\text{En tout point } x \in \Omega, \text{ l'espace tangent } T_x\mathbf{R}^n \text{ est engendré}\\&\text{par les champs } X_j \text{ et leurs crochets de longueur } \leqslant r.\end{aligned} \tag{0.2}$$

Plus précisément, si la condition d'Hörmander ((0.2)) est réalisée, P admet une paramétrixe continue de H^s_{comp} dans $H^{s+2/r}_{\text{loc}}$ et est hypoelliptique avec perte de $2(1 - 1/r)$ dérivées.

Par contre, on sait que la condition (0.2) n'est pas suffisante pour que P soit hypoelliptique analytique (voir [1], [11] pour des contre-exemples). Il faut rajouter des hypothèses sur la variété caractéristique de P. Par exemple, si Σ est une sous-variété analytique de T^*X sur laquelle le symbole principal de P s'annule exactement à l'ordre deux, et si Σ est symplectique, on sait que P est hypoelliptique analytique d'après [10] [15] [16]. Les résultats obtenus par le second auteur dans [14] s'appliquent si P satisfait (0.2) avec $r = 2$ et on obtient l'hypoellipticité analytique ou une propriété de propagation des singularités dans différents cas géométriques. On renvoie aussi à [5] pour des résultats de propagation.

Les résultats de [14] s'obtiennent en effectuant une transformation de Fourier–Bros–Iagolnitzer et en exploitant une inégalité a priori dans des espaces L^2 avec poids de fonctions holomorphes, inégalité stable pour certaines déformations des fonctions poids. Ici nous considérons les cas où la condition d'Hörmander ((0.2)) est satisfaite avec $r \geqslant 3$. L'inégalité a priori (2.28) de [14] n'est plus vraie et doit être remplacée par une autre plus faible que nous obtenons au §2 en adaptant les preuves d'inégalités dans le réel de [7] [2]. Pour

Received June 27, 1984.