INTERPRETATIONS COMBINATOIRES DES NOMBRES DE GENOCCHI

DOMINIQUE DUMONT

1. Introduction et notations. L'objet de ce travail est de proposer des interprétations combinatoires pour les nombres de Genocchi, les premières à notre connaissance. Rappelons que l'intérêt porté à cette suite d'entiers vient de son étroite liaison avec les nombres de Bernoulli et avec les nombres d'Euler de deuxième espèce ou nombres tangents. En effet, les fonctions génératrices de ces trois suites de nombres sont respectivement (se référer à [7], [14], [16] ou [17]):

$$G(t) = \frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n\geq 1} (t^{2n}/(2n)!)G_{2n} \quad \text{(nombres de Genocchi)}$$

$$B(t) = \frac{t}{e^t - 1} = 1 - t/2 + \sum_{n\geq 1} (t^{2n}/(2n)!)B_{2n} \quad \text{(nombres de Bernoulli)}$$

$$A(t) = \frac{2}{e^{2t} + 1} = 1 + \sum_{n\geq 1} (t^{2n-1}/(2n-1)!)A_{2n-1} \quad \text{(nombres tangents).}$$

Les premières valeurs des nombres de Genocchi sont:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_n	1	-1	0	1	0	-3	0	17	0	-155	0	2073

On a les identités:

$$G_{2n} = 2(1 - 2^{2n})B_{2n} \qquad (n \geq 1) \tag{1}$$

$$2^{2n-2}G_{2n} = nA_{2n-1} \qquad (n \geq 1). \tag{2}$$

En outre, la fonction génératrice des nombres $|A_{2n-1}|$ est la fonction tangente, d'où leur appellation:

$$t\,gt = \sum_{n\geq 1} (t^{2n-1}/(2n-1)!)\ |A_{2n-1}|$$

De l'identité (2) on tire:

$$t\ tg\,\frac{t}{2} = \sum_{n\geq 1} (t^{2n}/(2n)!)\ |G_{2n}|.$$

Or c'est précisément sur ces valeurs absolues $|A_{2n-1}|$ et $|G_{2n}|$ que nous allons nous pencher plus particulièrement au cours de cette étude.

On connaît l'interprétation combinatoire que Désiré André ([1], [2]) a, en 1881, donnée des nombres tangents. Les entiers $|A_{2n-1}|$ dénombrent les permutations

Received August 28, 1973.