ZUR NULLSTELLENVERTEILUNG VON EXTREMALPOLYNOMEN

VON GYULA (JULIUS) V. SZ. NAGY

1. Bezeichnet P eine aus endlichvielen Punkten bestehende, oder eine beschränkte abgeschlossene unendliche Punktmenge der komplexen Ebene, so heisst das Polynom

$$B(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \tag{1}$$

auf der Punktmenge P ein *Unterpolynom* des Polynoms

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n , \tag{2}$$

wenn in jedem Punkt p der Punktmenge P, wo $A(p) \neq 0$ bzw. $A(p) = 0$ ist, $| A(p) | > | B(p) |$ bzw. $B(p) = 0$ ist. Ein Polynom $A(p)$ ist auf P ein *Extremalpolynom*, wenn $A(z)$ auf P kein Unterpolynom besitzt. Die einfachsten Extremalpolynome sind das gewöhnliche und das allgemeine Tschebyscheffsche Polynom $A(z)$, für welches Max $| A(p) |$ bzw. Max $| A(p)/\varphi(p) |$ in den Punkten p von P möglichst klein ausfällt. Hier bedeutet $\varphi(z)$ eine vorgegebene Funktion, deren Wert in den Punkten p von Null abweicht. Auch die sogenannten Minimalpolynome ([1], [2], [3], [4]) sind Extremalpolynome.

Ist der Grad eines Extremalpolynoms auf P nicht kleiner, als die Anzahl der Punkte von P, so gelten die Sätze von Fejér, von Fekete und v. Neumann bzw. von mir:

1. *Jede Nullstelle eines zur Punktmenge P gehörigen Extremalpolynoms liegt in der konvexen Hülle von P.* (S. [1], [3].)

2. *Ist P symmetrisch bezüglich der reellen Achse g_x, so liegt jede nichtreelle Nullstelle eines zu P gehörigen Extremalpolynoms mit reellen Koeffizienten im Innern oder am Rande mindestens eines der Kreise, welche die Verbindungsstrecke je zweier in bezug auf g_x symmetrischer Punkte von P als Durchmesser haben.* (S. [2].)

3. *Sind α_1 und α_2 zwei Nullstellen eines Extremalpolynoms auf einer Punktmenge P, so kann nicht jeder Punkt von P auf derselben Seite einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Hauptachse die Strecke (α_1 , α_2) ist.* (S. [4].)

2. Der letzte Satz lässt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

I. *Durch keine zwei (verschiedene oder zusammenfallende) Nullstellen α_1 und α_2 eines zur Punktmenge P gehörigen Extremalpolynoms geht eine gleichseitige Hyperbel H mit dem Mittelpunkt $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, deren eine Seite jeden Punkt von P (im Innern) enthält.*

Received November 9, 1948.