SUR LES FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES DE PLUSIEURS VARIABLES DONT LES LAPLACIENS SUCCESSIFS ONT DES SIGNES ALTERNÉS

PAR PIERRE LELONG

1. **Introduction.** Dans la classe K_1^∞ des fonctions indéfiniment dérivables d'une variable, certains sous-ensembles de fonctions $f(x)$, caractérisés par la condition qu'une suite particulière de dérivées $f^{(n_k)}(x)$ conservent un signe constant dans l'intervalle $a < x < b$, le rapport n_{k+1}/n_k étant borné, forment nécessairement des classes de fonctions analytiques dans l'intervalle $a < x < b$. Les premiers résultats dans cette voie, dus à S. Bernstein [3; 190–197] ont été notablement précisés depuis, en particulier par R. P. Boas et G. Pólya [4], [5], [6].

Il est interéssant de chercher si les propriétés obtenues ainsi pour les fonctions de la classe K_1^∞ peuvent être considérées comme des cas particuliers de propositions portant sur la classe K_p^∞ des fonctions indéfiniment dérivables de p variables $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$. Me plaçant à ce point de vue, j'envisagerai ici l'extension d'une propriété particulièrement simple des fonctions $f(x) \in K_1^\infty$, proposition due à D. V. Widder [8], [9], et qui s'énonce:

Si $f(x)$ appartient à K_1^∞ et possède la propriété

$$(\mathrm{a}_1) \qquad (-1)^n f^{(2n)}(x) \geq 0 \qquad (a < x < b)$$

pour tout n entier, alors $f(x)$ est analytique dans l'intervalle $a < x < b$ et même est (ou plus précisément coincide avec) une fonction entière de type exponentiel.

Je considérerai les puissances successives $L^{(n)}(f, x_k)$ d'un opérateur linéaire $L(f, x_k)$ appliqué à une fonction $f(x_k)$ des p variables (x_k), définie et de classe K_p^∞ dans un domaine D de l'espace réel à p dimensions $\mathfrak{R}^p$ des variables (x_k). Je supposerai $L(f, x_k)$ de la forme:

$$(1) \qquad L(f, x_k) = \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, p),$$

où les b_{ij} sont des coefficients constants.

Je suppose, dans le but de rechercher une généralisation de la proposition précédente, que les conditions successives:

$$(\mathrm{a}_p) \qquad (-1)^n L^{(n)}(f, x_k) \geq 0$$

réalisées pour tout n entier et pour le point M de coordonnées (x_k) appartenant à un domaine D de $\mathfrak{R}^p$, entrainent l'analyticité de $f(x_k)$. Dans ce cas les solutions

Received September 18, 1946.