

SUR QUELQUES DÉFINITIONS POSSIBLES DE L'INTÉGRALE DE STIELTJES

PAR MAURICE FRÉCHET

Introduction. La définition la plus utile de l'intégrale de Stieltjes $\int_V F(x)dv(x)$ (où V est le domaine d'intégration) est celle qui concerne le cas où $F(x)$ est continu, $v(x)$ à variation bornée et où V est un segment fini. MM. F. Riesz et Lebesgue ont étendu cette définition, en la modifiant, au cas où $f(x)$ n'est pas continue.

En Calcul des Probabilités, deux extensions plus modestes paraissent seulement désirables. Celle concernant $F(x)$, où l'on suppose $F(x)$ monotone et qui trouve son application dans la détermination de la fonction des probabilités totales de la somme de deux variables indépendantes, forme l'objet de la Première Partie de ce mémoire. Les résultats obtenus prolongent en les complétant—en particulier, en adjoignant à leurs conditions suffisantes des conditions nécessaires—certains résultats antérieurs de MM. Lebesgue, Steffensen et Glivenko.

La seconde extension, concernant le cas où $F(x)$ est supposé continu mais où V est illimité, est le sujet traité dans la Seconde Partie de ce mémoire. Elle se trouve utile dans la détermination de la valeur et des propriétés de la valeur moyenne d'une fonction continue $f(X)$ d'une variable aléatoire X .

Les définitions de $\int_V f(x) dC(x)$.

Première partie. Cas où $f(x)$ est monotone

Extension de la définition de l'intégrale de Stieltjes. Quand $f(x)$ et $C(x)$ sont deux fonctions définies sur un intervalle fini (α, β) , la première continue, l'autre monotone, on démontre que la somme

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i) [C(x_i) - C(x_{i-1})]$$

tend vers une limite déterminée I quand, en prenant arbitrairement $\alpha = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = \beta$, la plus grande δ des différences $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro. Et on pose $I = \int_\alpha^\beta f(x)dC(x)$. On a étendu cette définition à des cas beaucoup plus généraux. Il nous sera seulement utile ici de considérer le cas où f , continue ou non, est monotone comme $C(x)$. Nous verrons quelle restriction il y a à faire pour que l'extension soit possible.

Received March 2, 1936.