MEMORIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVIII, Mathematics No. 1, 1953.

Sur la fonction definissant le loi de composition des transformations d'un groupe de Lie.

Par

Jōyō KANITANI

(Recu le 28 April 1953)

1. Envisageons un groupe de Lie G des transformations

$$x'^i = f^i(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^r) \qquad (i=1, \cdots, n).$$

Supposons que le loi de composition de ces transformations soit defini par

$$c^p = \varphi^p(a^1, \cdots, a^r, b^1, \cdots, b^r) \qquad (p=1, \cdots, r).$$

Dans cet article nous développons ces fonctions $\varphi(a, b)$ en séries suivant les puissances entiers de $a^1, \cdots, a^r, b^1 \cdots, b^r$ en choisissant convenablement les paramètres, et en exprimant les coefficients dans le développement en polynômes des constantes de structures c_{ij}^h du groupe G.

Nous avons

$$(1\cdot1) \qquad \begin{cases} c_{jk}^p + c_{kj}^p = 0, \\ c_{ij}^s c_{sk}^p + c_{jk}^s c_{si}^p + c_{ki}^s c_{sj}^p = 0, \\ (p, i, j, k = 1, \cdots, r;\ s : 1 \rightarrow r). \end{cases}$$

Posons

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_n q}^p = c_{i_1 s_1}^p\ c_{i_2 s_2}^{s_1} \cdots c_{i_n q}^{s_{n-1}}$$

Il vient alors d'après $(1\cdot1)$

$$\begin{aligned} & c_{h k_1 \cdots k_a}^i c_{l_1 \cdots l_b j}^h\ u^{l_1} u^{l_2} \cdots u^{l_b} \\ & = \Big(c_{l_1 \cdots l_b j\, k_1 \cdots k_a}^i - \binom{b}{1} c_{l_1 \cdots l_{b-1} j l_b\, k_1 \cdots k_a}^i + \cdots \\ & \quad + (-1)^\lambda \binom{b}{\lambda} c_{l_1 \cdots l_{b-\lambda} j l_{b-\lambda+1} \cdots l_b\, k_1 \cdots k_a}^i \\ & \quad + \cdots + (-1)^b c_{j\, l_1 \cdots l_b\, k_1 \cdots k_a}^i \Big) u^{l_1} \cdots u^{l_b} \\ & \qquad (a \geq 1,\ b \geq 1). \end{aligned}$$

En effet, faisons d'abord $b=1$. Nous avons

$$\begin{aligned} c_{h k_1 \cdots k_a}^i c_{lj}^h &= c_{hs}^i\ c_{k_1 \cdots k_a}^s c_{lj}^h = c_{k_1 \cdots k_a}^s c_{lj}^h\ c_{hs}^i \\ &= -c_{k_1 \cdots k_a}^s (c_{js}^h\ c_{hl}^i + c_{sl}^h\ c_{hj}^i) \end{aligned}$$