

Über den Durchschnitt $\bigcap_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha}$ der Ideale \mathfrak{a}_{α}

Masazo Sono zum 70 Geburtstag gewidmet

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen am 15. Oktober 1954)

Der Krullsche Durchschnittssatz lautet bekanntlich:

Es sei \mathfrak{R} ein Integritätsbereich mit Einheits-element, der der Maximalbedingung genügt. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i} \mathfrak{a}^i$ aller Potenzen eines beliebigen Ideals \mathfrak{a} aus \mathfrak{R} stets gleich dem Nullideal, wenn \mathfrak{a} von \mathfrak{R} verschieden ist.

Wählt man für \mathfrak{R} an Stelle des Integritätsbereichs mit der Maximalbedingung irgendeinen Integritätsbereich, in dem jedes Ideal sich als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt, so gilt der Durchschnittssatz bestimmt nicht mehr, wie durch das Beispiel, etwa des Stiemkeschen unendlichen algebraischen Zahlkörpers,¹⁾ gezeigt wird.

Um den Krullschen Satz in den obig besprochenen Integritätsbereichen zu verallgemeinern, erweist es sich aber als nötig, den Durchschnitt $\bigcap_{i} \mathfrak{a}^i$ durch einen neuen Begriff zu ersetzen, der aber im Noetherschen Integritätsbereich mit $\bigcap_{i} \mathfrak{a}^i$ übereinzustimmen hat.

Es sei darum \mathfrak{a}_{α} ein beliebiges Ideal, das gleichzeitig mit einem gegebenen Ideal \mathfrak{a} auch zu demselben Halbprimideal gehört, d.h. jedes Element von \mathfrak{a}_{α} sei nilpotent in Bezug auf \mathfrak{a} und umgekehrt. Wenn wir wie den Durchschnitt $\bigcap_{i} \mathfrak{a}^i$ auch den Durchschnitt $\bigcap_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha}$ von allen Idealen \mathfrak{a}_{α} , welche mit \mathfrak{a} zu demselben Halbprimideal gehören, in Betracht ziehen, so sind im kommutativen Ring mit der Maximalbedingung die beiden Durchschnitten $\bigcap_{i} \mathfrak{a}^i$ und $\bigcap_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha}$ identisch.

In erster Linie handelt es sich um die Eigenschaften des

1) N. Nakano, Idealtheorie im Stiemkeschen Körper, Jour. of Sci. of Hiroshima Univ. 18, No. 3. (1955), 271-287.