J. Math. Kyoto Univ.
1-3 (1962) 411-423.

Une remarque sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques et partiellement hypoelliptiques

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 18 avril, 1962)

---

1. Récemment, MM. Gårding et Malgrange ont défini la notion de partiellement hypoellipticité [1]. Ce petit article a pour but de montrer comment on étend ce résultat au cas des coefficients variables[1]. Comme on verra dans la suite, il n'y a aucune difficulté à étendre le raisonnement habituel fait pour les opérateus hypoelliptiques aux opérateurs partiellement hypoelliptiques[2]. Nous avons adapté le raisonnement de Malgrange exposé dans [2].

Lemme 1.1. Soit s réel >0. $\gamma_s(x)=(1-\Delta)^{s/2}\delta$, δ étant la mesure de Dirac. On a

$$\text{(1.1)}\qquad \|(x^\nu\gamma_s)*\varphi\|_{L^2}\leqslant \mathcal{E}(\nu,d)\|\gamma_s*\varphi\|_{L^2},\ \text{où } \varphi\in\mathcal{D},\ \nu>0\,.$$

$\mathcal{E}(\nu, d)$ est une constante qu'on peut prendre aussi petit qu'on le veut selon que d (=diamètre du support de φ) est choisi assez petit.

Preuve. $x^\nu\gamma_s \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \left(-\dfrac{i}{2\pi}\right)^{|\nu|}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}=p_\nu(\xi)\hat{\gamma}_s(\xi)$,
où $\hat{\gamma}_s(\xi)=(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}$; $p_\nu(\xi)$ tendant vers 0 avec $|\xi|\to\infty$.

---

1) M. S. Matsuura a déjà étendu des résultats de [1] au cas de systèmes: [3].

2) Cette recherche a été faite d'après la question posée par Prof. P. D. Lax quand l'auteur a été Membre Temporiel (Temporary Member) à l'Institut des Sciences Mathématiques (Institute of Mathematical Sciences, New York University) pendant l'année scolaire 1959-60. Notre méthode n'est autre que celle de Malgrange [2]. Mais nous devrions signaler que, si l'on calcule le commutateur $[c(x)\gamma_s* -\gamma_s*c(x)]\varphi$ explicitement, (voir la proposition 1.1 ci-dessous), quelques propositions de [2] deviennent assez claires (Voir, par exemple, Proposition II, 2.4). La section 1 a été rédigée pour élucider notre méthode. La démonstration pour les opérateurs partiellement hypoelliptiques s'expose dans la section 2.