J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-3 (1973) 557-578

Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables

Par

Toshiaki TERADA

(Reçu le 12, Décembre 1972)

Introduction

On sait que Riemann [8] a donné un nouveau point de vue aux fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. En 1857 il a établi que, si une fonction à deux branches linéairement indépendantes a les trois points critiques 0, 1, ∞ et les exposants convenables relatifs à ces points, elle remplit nécessairement une équation différentielle hypergéométrique et par suite elle est une fonction hypergéométrique. Ensuite en 1873 Schwarz [9], à la recherche des conditions sous lesquelles $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ soit une fonction algébrique, a trouvé les cas particuliers où l'invertion du quotient de deux solutions d'une équation hypergéométrique définit une fonction automorphe sur le cercle unité.

Picard a généralisé ces travaux à deux variables. En donnant les exposants aux plans critiques ($x=0$, $x=1$, $x=\infty$, $x=y$, $y=0$, $y=1$, $y=\infty$) dans l'espace d'Osgood $(P^1)^2$, il a déterminé univoquement un système complètement intégrables d'équations différantielles dont une solution n'était autre chose qu'une série hypergéométrique d'Appell $F(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, x, y)$ [1], et remarqué qu'elle a une représentation intégrale du type d'Euler [3]. Puis il a montré que l'invertion de l'application à l'espace projectif définie par les trois solutions linéairement indépen-