J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
22-4 (1983) 643–664

Sur la formulation du problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ordinaires linéaires

Par

Keiichiro KITAGAWA

(Communiqué par Prof. S. Mizohata, le 27 juillet 1981)

1. Introduction.

Il s'agit du problème de Cauchy analytique: Étant donné un système général d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients analytiques, on se propose de demander quelle formulation du problème de Cauchy à données analytiques soit possible. Soit $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ une NxN-matrice d'opérateurs différentiels ordinaires linéaires à coefficients analytiques au voisinage d'un point, soit l'origine. Soit $\mathfrak{M}=(m_1,\dots, m_N)$ une multi-indice d'éléments entiers non négatifs. Nous entendons par le problème de Cauchy analytique le probléme $(C)_{\mathfrak{M}}$ suivant:

$(C)_{\mathfrak{M}}$ *Étant donnés un vecteur $\vec{f}(t)={}^t(f_1(t),\dots,f_N(t))$ d'éléments analytiques au voisinage de l'origine et un système de nombres complexes $\Phi=\{\phi_{jk};\ k=0, 1,\dots, m_j-1, j=1,\dots, N\}$, trouver un vecteur $\vec{u}(t)={}^t(u_1(t),\dots, u_N(t))$ d'éléments analytiques au voisinage de l'origine tel que l'on ait $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ au voisinage de l'origine et que l'on ait $\left(\frac{d}{dt}\right)^k u_j(0)=\phi_{jk};\ k=0, 1,\dots, m_j-1, j=1,\dots, N$.*

Nous disons que *ce problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ est bien posé* si, pour toutes les données $\vec{f}(t)$ et Φ, il existe une et une seule solution $\vec{u}(t)$ du problème $(C)_{\mathfrak{M}}$.

Notre but est alors de chercher la condition nécessaire ou suffisante pour que le problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ soit bien posé. A cette étude, les travaux de L. R. Volevič [4] sont fondamentaux et il nous est utile d'en esquisser ici brièvement.

L'ordre formel R_f de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)=\left(a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right)\right)_{i,j\in I}$, où $I=\{1,\dots, N\}$, est défini par:

$$R_f=\operatorname{Sup}\left\{\sum_{i=1}^{N} \text{ordre } a_{i\pi(i)}\left(t, \frac{d}{dt}\right);\ \pi\in\Pi\right\}$$

où Π est l'ensemble de toutes les permutations π de $I=\{1,\dots, N\}$, et qu'il est convenu