J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
24-3 (1984) 453–471

Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes

Par

Belhassen DEHMAN

(Communiqué par Prof. Mizohata, le 22janvier 1983)

Introduction

La propriété d'unicité du problème de Cauchy pour un opérateur différentiel, à partir d'une surface non caractéristique, a fait l'objet de nombreux travaux dont les premiers remontent à T. Carleman [7], A. P. Calderón [6], S. Mizohata [14] et L. Hörmander [10]. Ces auteurs ont donné des conditions suffisantes sur la partie principale pour avoir l'unicité quels que soient les termes d'ordre inférieur. Cela dit, la propriété d'unicité, comme l'ont d'abord montré P. Cohen [8], A. Pliš [16],... dépend, en général, du symbole total de l'opérateur. Des travaux récents de S. Alinhac - M. S. Baouendi [2], S. Alinhac - C. Zuily [3], R. Lascar - C. Zuily [13], S. Alinhac [1], ont permis de clarifier sur certaines classes d'opérateurs, le rôle des termes d'ordre inférieur, en fournissant pour l'unicité des conditions suffisantes et des condition nécessaires.

Le présent travail est consacré à une classe d'opérateurs du second ordre et constitue une suite naturelle aux travaux de [3] et [13].

On considère dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^{n+m}$ (dont on note (x, y), $x \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}^m$ le point courant), un opérateur de la forme:

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x, y) D_x^\alpha + p_1(x, y, D_y) + i p_2(x, y, D_y)$$

où a_α, $|\alpha| = 2$, est réel et dans $C^\infty(\Omega)$, et pour $j = 1, 2$, $p_j(x, y, D_y)$ est un opérateur homogène d'ordre 1, à coefficients réels, et dans $C^\infty(\Omega)$.

Soit (x_0, y_0) un point de Ω et $S = \{\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)\}$; $d\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, une hypersurface passant par (x_0, y_0). On se place dans l'un des deux cas suivants:

1. Les formes linéaires $p_1(x_0, y_0, \eta)$ et $p_2(x_0, y_0, \eta)$ sont indépendantes.
2. $p_2 \equiv 0$ sur Ω et $p_1(x_0, y_0, \eta) \not\equiv 0$.

On montre alors que, modulo des conditions de structure (dont une partie est justifiée dans [3]), l'unicité locale du problème de Cauchy relativement à S est régie essentiellement par une notion géométrique liée à cette hypersurface: la pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques (Th. 2.1 cf. [13]).

On donne aussi un Théorème, en coordonnées locales, qui permet d'étudier des