J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
25-2 (1985) 221-253

Solution holomorphe pour des équations du premier ordre à symboles principaux dégénérés

Par

Akira NAKAOKA

(Communicated by Prof. S. Mizohata, December 15, 1983)

1. Introduction. Dans cet article, on considére l'existence de la solution holomorphe pour l'équation suivante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \cdots, x_n)\partial u/\partial x_j = u \qquad (n \geqq 2) \tag{1.1}$$

où tous les coefficients sont holomorphes et s'annullent à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Le terme "solution holomorphe" ou simplement "solution" signifie partout dans cet article "la solution holomorphe non-triviale".

Tout d'abord, on note que la condition nécessaire pour l'existence de solution est facilement obtenue. A l'ennoncer, on introduit une matrice

$$\mathcal{A} = \partial(a_1, \cdots, a_n)/\partial(x_1, \cdots, x_n)|(0, \cdots, 0) \tag{1.2}$$

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\mathcal{A}$, alors on voit facilement qu'il est nécessaire pour l'existence de solution que la relation suivante est satisfait par certain multi-indice $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \bar{\mathbf{N}}^n$, où $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j = 1 . \tag{1.3}$$

Mais, comme on le voit facilement, (1.3) n'est pas suffisante en général. Un contre-exemple est donné dans [4].

Par ailleurs, dans un certain cas, (1.3) donne la suffisance. Soit Λ l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. Introduissons une condition sur Λ:

(P) $\qquad \Lambda \not\ni 0 \qquad$ (*la condition de Poincaré*).

Le théorème suivant est bien connu.

Théorème A. *Sous la condition* (P), (1.3) *donne la suffisance pour l'équation* (1.1) *à admettre au moins une solution.*

La condition (P) nous apporte

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i - 1 \right| \geqq c|\alpha| , \tag{1.4}$$