J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
25-4 (1985) 627–633

Über Längen- und Flächenverzerrungen für die Carathéodorysche Klasse

Herrn Professor Yukio Kusunoki zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

Von

Yûsaku Komatu

(Communicated by Prof. Kusunoki June 1, 1984)

Einleitung

Es sei $\mathscr{F}$ die Klasse derjenigen im Einheitskreis $E=\{|z|<1\}$ regulär analytischen Funktionen f, die durch $f(0)=0$ und $f'(0)=1$ normiert sind. In einer früheren Note [4], und mehr ausführlich in [5], haben wir den linearen Operator $\mathscr{L}$ eingeleitet, der auf der Klasse $\mathscr{F}$ durch die Gleichung

$$\mathscr{L}f(z)=\int_I \frac{f(zt)}{t}\,d\sigma(t)$$

mit einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß σ auf dem Intervall $I=[0, 1]$ definiert wird. Es läßt sich dabei zeigen, daß dieser Operator immer in eine in bezug auf einen reellen Parameter $\lambda\geqq 0$ additive Familie $\{\mathscr{L}^{\lambda}\}$ mit $\mathscr{L}^1=\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}^0=\mathrm{id}$ eingebettet wird und sogar, daß es unter gewisser zugefügter Einschränkung an σ ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß σ_{λ} für jedes λ gibt, das die Integraldarstellung

$$\mathscr{L}^{\lambda}f(z)=\int_I \frac{f(zt)}{t}\,d\sigma_{\lambda}(t)$$

zuläß. Im folgenden soll es sich um diese Familie $\{\mathscr{L}^{\lambda}\}$ handeln und der Kürze halber wird $f_{\lambda}=\mathscr{L}^{\lambda}f$ geschrieben.

Für das besondere Maß $\sigma(t)=t$ tritt ein ausgezeichneter Fall auf. In der Tat, läßt sich zeigen, daß das Maß σ_{λ} dann die Dichte besitzt und sogar der Operator $\mathscr{L}^{\lambda}$ explizit durch

$$\mathscr{L}^{\lambda}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 \frac{f(zt)}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1}dt$$

bestimmt wird. Dieser Operator führt sich demgemäß auf die fraktionale Integration der Ordnung λ in bezug auf $\log z$ zurück; nämlich läßt er sich in die Gestalt

$$\mathscr{L}^{\lambda}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_{\infty}^{\log z} f(e^{\omega})\,(\log z-\omega)^{\lambda-1}d\omega$$