J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
33-1 (1993) 115-142

Estimation de la densité d'une diffusion très dégénérée Etude d'un exemple

Par

Patrick FLORCHINGER et Rémi LÉANDRE

Introduction

Cet article est motivé par l'étude des formes sur l'espace des lacets menée dans [12] en se basant sur les travaux concernant la cohomologie cyclique entière développés dans [6]. Rappelons tout d'abord les principaux résultats obtenus dans [12]. Si $\sum_n (\omega_1^n, \dots, \omega_n^n)$ désigne une collection de formes sur une variété compacte M, la forme correspondante sur l'espace des lacets, de degré infini en général, obtenue au moyen d'intégrales itérées de Chen est dans tous les espaces L^p pourvu que la série $\sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\|\omega_i^n\|_{1,\infty}}{\sqrt{n}} z^n$ possède un rayon de convergence infini (ici, $\|\cdot\|_{1,\infty}$ désigne une norme C^1). Toutefois, pour prouver ce théorème, il est nécessaire de supposer que le couple formé du brownien et de son transport parallèle est une diffusion satisfaisant la condition de Hörmander. D'autre part, par utilisation du calcul de Malliavin (c.f. [9], [22], [13], [14], [23], [10], [24], [27], [28], [30] par exemple pour un exposé sur ce sujet), on montre que si pour tout entier K, la série $\sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\|\omega_i^n\|_{K,\infty}}{\sqrt{n!}} z^n$ possède un rayon de convergence infini ($\|\cdot\|_{K,\infty}$ désignant une norme C^K) alors, la forme correspondante sur l'espace des lacets est dans tous les espaces L^p. Ces résultats suffisent à montrer que les formes cohérentes et le caractère de Chern équivariant sur l'espace des lacets défini par Bismut [5] est dans tous les espaces L^p. Remarquons que cela reste malgré tout insuffisant du point de vue du calcul stochastique. On est donc amené à étudier une classe de diffusions très dégénérées, issue d'un exemple de Kusuoka-Stroock [15] où l'examen des fluctuations polynomiales de la diffusion (c.f. [18]) n'apporte aucun résultat sur la densité de celles-ci. Toutefois, on procède dans cet article à une étude qui ne coïncide pas exactement avec le cadre du problème originellement posé.

Dans la première partie de cet article, on considère le générateur A défini sur $\mathbf{R}^2$ par $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial}{\partial y}$ et, on suppose que la fonction g est exponentiellement plate en $x = 0$ (on peut consulter [16], [2-3] pour des exemples

Communicated by Prof. S. Watanabe, July 1, 1991