

SUR LA STRUCTURE DES ESPACES DE L.S. CATÉGORIE DEUX

PAR

YVES FELIX¹ ET JEAN-CLAUDE THOMAS²

0. Introduction

0.1. Tous les espaces S considérés dans cet article sont supposés 1-connexes, ayant le type d'homotopie d'un cw complexe et de cohomologie rationnelle $H^*(S; \mathbf{Q})$ de dimension finie en chaque degré. Chaque groupe abélien $\pi_i(S) \otimes \mathbf{Q}$ est alors de rang fini et le crochet de Whitehead, défini sur $\pi_*(S)$, munit $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée appelée *l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de S* .

Le but de cet article est l'étude de cette structure d'algèbre de Lie lorsque S est de catégorie rationnelle 2. Rappelons que la *catégorie de Lusternik-Schnirelmann* d'un espace topologique S , notée $\text{cat } S$, est le plus petit entier m tel que S puisse être recouvert par $m + 1$ ouverts contractiles dans S . La catégorie rationnelle d'un espace 1-connexe, notée $\text{cat}_0(S)$, est par définition la catégorie du rationalisé $S_{\mathbf{Q}}$ de S , et nous avons la relation

$$\text{cat}_0 S \leq \text{cat } S \quad [31].$$

Le premier calcul de $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est dû à Hilton en 1955 [15]. Hilton y démontrait que, si S est un bouquet de sphères 1-connexes, alors $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de Lie graduée libre. Tout espace de catégorie rationnelle un ayant le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères, le résultat de Hilton se généralise à ces espaces.

Pour les espaces de catégorie deux, ceci n'est plus vrai. La situation est beaucoup plus complexe. Par exemple, l'homotopie rationnelle de l'espace $(S^2 \vee S^2) \times S^2$ a un centre non nul. Ces espaces de catégorie deux constituent en fait rationnellement le premier type non évident de structure cellulaire. Ils ont été beaucoup étudiés, notamment par J.M. Lemaire dans sa thèse [18]. Ils sont très riches: C'est parmi ces espaces que D. Anick trouva un contre-exemple à la conjecture de Serre [1].

Received December 5, 1983.

¹Chercheur qualifié au F.N.R.S.

²E.R.A. au C.N.R.S. 07590