SUR LA NON FACTORISATION DES ELEMENTS DE L'ESPACE DE HARDY $H^1(U^2)$

BY

JEAN-PIERRE ROSAY

I. Introduction

Nous reprenons d'une façon générale les notations de [4]. En particulier U^n désigne le polydisque unité de $\mathbf{C}^n$, $H^1(U^n)$ et $H^2(U^n)$ les espaces de Hardy classiques sur le polydisque.

Il est bien connu que tout élément de $H^1(U)$ peut s'écrire comme le produit de deux éléments de $H^2(U)$. Ce résultat ne demeure pas en plusieurs variables. On sait que W. Rudin a montré que dès que $n \geq 4$, il existe un élément de $H^1(U^n)$ qui n'est pas le produit de deux éléments de $H^2(U^n)$, cf. [4, pp. 63.67].

Nous noterons θ l'application de $H^2(U^2) \times H^2(U^2)$ dans $H^1(U^2)$ qui à tout couple d'éléments de $H^2(U^2)$ associe leur produit. Dans le livre de W. Rudin, deux questions sont dégagées: θ est-elle surjective? θ est-elle ouverte en (0, 0) (i.e. l'image de tout voisinage de (0, 0) est-elle un voisinage de 0)?

L'équivalence de ces deux questions n'est pas évidente; en effet P. J. Cohen a donné dans [1] l'exemple de deux espaces de Banach E et F et d'une application bilinéaire surjective de $E \times E$ sur F non ouverte en (0, 0).

Ma contribution à la question est de montrer que l'application θ est surjective si et seulement si elle est ouverte en (0, 0) (c'est fondamentalement ce qui est fait dans le paragraphe III).

D'autre part J. Miles a montré dans [3] que l'application θ n'est pas ouverte en (0, 0) (il en déduit la non factorisation dans $H^1(U^3)$ en suivant la fin de la démonstration du Théorème 4.2.2 de [4]).

Finalement nos deux résultats donnent la proposition suivante:

PROPOSITION. *Il existe un élément de $H^1(U^2)$ qui ne peut pas s'écrire comme le produit de deux éléments de $H^2(U^2)$.*

Je suis très reconnaissant au Professeur W. Rudin d'avoir porté à ma connaissance le résultat de J. Miles, pour la commodité du lecteur je reproduis dans le paragraphe II la démonstration simplifiée qu'il m'a communiquée.

II. Un Lemme

LEMME (J. Miles). *Pour toute constante $C > 0$, il existe $F \in H^1(U^2)$ vérifiant $\|F\|_1 \leq 1$ et telle que pour tout h et $k \in H^2(U^2)$ vérifiant $F = hk$ on ait $\|h\|_2$ ou $\|k\|_2 > C$.*

Received December 23, 1974.