ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 35, Number 1, Spring 1991

HYPERZENTRALE TORSIONSGRUPPEN, DEREN UNTERGRUPPEN ALLE SUBNORMAL SIND

VON

WALTER MÖHRES

Wir zeigen in dieser Arbeit, daß hyperzentrale Torsionsgruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind, nilpotent sind. Nach einer Arbeit von H. Heineken und I.J. Mohamed, [1] gibt es p-Gruppen mit trivialem Zentrum, deren Untergruppen alle subnormal sind. Daher ist klar, daß wir auf die Voraussetzung der Hyperzentralität nicht verzichten können. H. Smith, [7] hat eine gemischte, hyperzentrale Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind, konstruiert. Also ist auch die Voraussetzung, daß die Gruppen periodisch sind, notwendig.

In Abschnitt (1) wenden wir uns zunächst dem Fall einer hyperzentralen Torsionsgruppe G zu, deren Kommutatoruntergruppe G' endlichen Exponenten hat. Unter $K_n(G)$ verstehen wir im weiteren das n-te Glied der absteigenden Zentralreihe der Gruppe G. Zunächst folgt ein Hilfssatz.

(1.1) LEMMA. *N sei ein nilpotenter Normalteiler der Gruppe G und habe als Exponenten eine p-Potenz. $G/(N'N^p)$ sei nilpotent. Dann ist auch G nilpotent.*

Beweis. Wegen [5], 5.2.10 können wir $N' = 1$ annehmen. Es gibt ein $n \in \mathbf{N}$ mit $K_n(G) \leq N^p$. Für ein $m \in \mathbf{N}$ sei $K_{nm-m+1}(G) \leq N^{p^m}$. Dann gilt

$$K_{n(m+1)-(m+1)+1}(G) \leq \left[N^{p^m}, {}_{n-1}G\right] \leq [N, {}_{n-1}G]^{p^m} \leq K_n(G)^{p^m} \leq N^{p^{m+1}}.$$

Ist nun p^e der Exponent von N, so folgt $K_{ne-e+1}(G) \leq N^{p^e} = 1$, d.h. G ist nilpotent.

Im folgenden Satz untersuchen wir die Torsionsgruppen, die eine Engelbedingung erfüllen.

(1.2) SATZ. *Sei G eine Torsionsgruppe, die eine Engelbedingung erfüllt. G' habe endlichen Exponenten. Jede Untergruppe von G sei subnormal in G. Dann ist G nilpotent.*

Received November 28, 1988.