ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 35, Number 4, Winter 1991

SOUS-GROUPES DENSES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

PAR E. MACIAS-VIRGÓS

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Un *réseau* de G est un sous-groupe discret Γ_0 qui est uniforme, c'est-à-dire tel que G/Γ_0 soit compact.

Un résultat bien connu de Mal'cev [Ma] établit que G possède un tel réseau si et seulement si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet des constantes de structure rationnelles par rapport à une certaine base; on dit alors que G est rationnel. Tout groupe abélien est rationnel; des exemples de groupes non rationnels sont donnés dans [Ma] et [Sch].

Le but de ce travail est d'examiner la situation suivante, qui apparaît, par exemple, dans l'étude des feuilletages transversalement de Lie à feuilles denses sur une variété compacte [Mo]:

QUESTION. Soit Γ un sous-groupe *dense* de G. Est-il toujours possible de trouver un réseau de G qui soit contenu dans Γ?

Lorsque G est rationnel il semblerait en principe possible de déformer n'importe quel réseau jusqu'à le rendre contenu dans le sous-groupe Γ fixé auparavant.

C'est par exemple ce qui se passe pour $\mathbf{R}^n$, où l'on sait qu'un sous-groupe discret est uniforme si et seulement s'il contient n vecteurs $\mathbf{R}$-linéairement indépendants; nous généralisons ce résultat à une classe plus large d'extensions centrales de $\mathbf{R}^2$ qui inclut en particulier le groupe d'Heisenberg $H_3 \subset SL(3, \mathbf{R})$.

Mais, de façon assez surprenante, le résultat n'est plus vrai en général même pour les extensions centrales de $\mathbf{R}^3$. En effet, au §3 nous montrons que dans le groupe de Lie H_5 des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Received January 29, 1990.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 Revision). Primary 22E25; Secondary 58A12.