ENGELSCHE ELEMENTE DER LÄNGE DREI

VON
HERMANN HEINEKEN

Einleitung

Es ist bekannt, daß alle Elemente einer Gruppe G sicher dann engelsch der Länge n sind, wenn G nilpotent der Klasse n ist (d.h. wenn das $(n + 1)$-te Glied der absteigenden Zentralreihe gleich 1 ist). Allgemeiner sind alle Elemente aus G engelsche Elemente, wenn jede von zwei Elementen erzeugte Untergruppe nilpotent (von endlicher Klasse) ist. Da die abgeleiteten Eigenschaften auf den ersten Blick schwächer als die Ausgangseigenschaften sind, ist die Frage interessant, wie weit eine Umkehrung möglich ist. Um diese Fragen etwas mehr zu präzisieren, erinnern wir an die Definition der engelschen Elemente:

Sind x, y Gruppenelemente, so sei ihr Kommutator durch $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$ bezeichnet; und die iterierten Kommutatoren werden induktiv durch

$$x^{(1)} \circ y = x \circ y, \qquad x^{(n+1)} \circ y = x \circ (x^{(n)} \circ y)$$

erklärt. Das Gruppenelement e heiße engelsch der Länge n, kurz n-engelsch, wenn $x^{(n)} \circ e = 1$ für alle x gilt; und e heiße engelsch, wenn für jedes x in der Kommutatorreihe $x^{(i)} \circ e$ die Eins vorkommt. Weiter sei G eine E_n-Gruppe, wenn alle Elemente aus G engelsch der Länge n sind.

Unter Benutzung dieser Definitionen ergeben sich folgende Fragen:

(A) *Ist eine Gruppe lokal nilpotent, wenn ihre Elemente sämtlich engelsch sind?*

(B) *Sind alle Elemente einer Gruppe G engelsch, wenn G von engelschen Elementen erzeugt wird?*

(A, n) *Ist G eine nilpotente Gruppe der Klasse $c(n)$, wenn die Elemente aus G sämtlich n-engelsch sind?*

(B, n) *Ist G eine E_n-Gruppe, wenn G von n-engelschen Elementen erzeugt wird?*

Diese Fragen sind bisher nur unter Zusatzannahmen behandelt worden; so ist etwa die Antwort auf die Fragen (A) und (B) positiv, wenn die betrachteten Gruppen noethersch sind (Baer [3]); und Gruenberg [4] hat alle vier Fragen für lokal auflösbare Gruppen behandelt.

Levi [7] und Kappe [6] beschäftigten sich mit engelschen Elementen der Länge zwei und konnten dabei (A, 2) bzw. (B, 2) positiv beantworten. Gruenberg zeigte in einem Beispiel [4, S. 166], daß (A, 3) für Gruppen vom Exponenten 4 gewiß zu verneinen ist. Man muß daher damit rechnen, daß die Antworten auf die Fragen (A, 3) und (B, 3), die das Ziel dieser Ar-

Received February 3, 1961.