VIERECKSTRANSITIVITÄT DER KLEINEN PROJEKTIVEN GRUPPE EINER MOUFANG-EBENE

VON

HELMUT SALZMANN

1. In der vorstehenden Arbeit hat Herr Pickert eine Bedingung dafür angegeben, daß die kleine projektive Gruppe einer Moufang-Ebene transitiv auf den nicht ausgearteten Punktquadrupeln (= Vierecken) ist. Hier soll nun der folgende allgemeinere Satz bewiesen werden:

Ist jedes Element des Koordinaten-Alternativkörpers einer Moufang-Ebene von der Form $((ab)c)((ab^{-1}a)c^{-1})$, *so ist die kleine projektive Gruppe dieser Moufang-Ebene viereckstransitiv.*

Insbesondere gilt das, wenn der Alternativkörper $\mathfrak{A}$ die Bedingung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$ oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}^3\,(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A})$ erfüllt, wo $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$ die Menge der multiplikativen Kommutatoren $b \circ c = bcb^{-1}c^{-1}$ bedeute. Die Beziehungen dieser Spezialfälle untereinander und zu dem Ergebnis von Herrn Pickert werden am Schluß erörtert. Für Desarguessche Ebenen wird bewiesen, daß ihre kleine projektive Gruppe genau dann viereckstransitiv ist, wenn ihr Koordinaten-Körper von seinen dritten Potenzen und multiplikativen Kommutatoren erzeugt wird. Ferner wird ein Beispiel einer Desarguesschen Ebene mit viereckstransitiver kleiner projektiver Gruppe angegeben, die jedoch nicht mit der vollen projektiven Gruppe zusammenfällt. Zur Erklärung der Bezeichnungen sei auf die vorangehende Arbeit [4] und das Buch [3] von Pickert verwiesen.

2. Die kleine projektive Gruppe einer Moufang-Ebene ist bekanntlich (Pickert [3], S. 194) stets transitiv auf der Menge der einfach ausgearteten Vierecke (d.h. der Punktquadrupel, die aus drei paarweise verschiedenen Punkten einer Geraden und einem Punkt außerhalb der Geraden bestehen). Um die volle Viereckstransitivität zu beweisen, genügt es also, eine kleine projektive Kollineation anzugeben, die bei festgehaltenem Koordinaten-Dreieck O, U, V den Einheitspunkt E in einen beliebigen anderen, auf keiner Seite des Koordinaten-Dreiecks liegenden Punkt E' der Geraden OE überführt.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich in einer beliebigen Moufang-Ebene eine kleine projektive Kollineation finden läßt, die das Koordinaten-Dreieck fest läßt und den Punkt E auf einen vorgegebenen Punkt mit den Koordinaten

$$x = y = ((ab)c)((ab^{-1}a)c^{-1})$$

abbildet. Die gesuchte kleine projektive Kollineation wird als Produkt von höchstens 12 kleinen zentralen Kollineationen dargestellt, deren Zentrum eine

Received November 13, 1958; received in revised form January 5, 1959.