SUR LA CROISSANCE RADIALE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

PAR PAUL MALLIAVIN

Etant donné une fonction holomorphe $f(z)$ dans le demiplan $x > 0$, de type exponentiel, cette fonction est déterminée par ses valeurs sur une suite Λ "assez dense" de points situés sur $x > 0$. Dans quelle mesure le développement asymptotique de $f(z)$ est-il comparable au développement asymptotique de $f(z)$ sur la suite Λ? Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux, en particulier de V. Bernstein, R. P. Boas, Miss Cartwright, Levinson, W. H. J. Fuchs, dont on trouvera un exposé dans le récent livre de R. P. Boas [1] auquel nous renvoyons pour la bibliographie à laquelle il faut ajouter [2] et [3] publiés depuis.

Dans le travail ci-dessous, on s'est efforcé de séparer deux groupes d'hypothèses de nature différente. En premier lieu des hypothèses d'unicité ou "d'adhérence", c'est à dire des hypothèses qui assurent que la fonction $f(z)$ considérée est déterminée par ses valeurs sur la suite Λ. En second lieu des hypothèses abéliennes sur la régularité de la répartition de la suite Λ. Celles-ci jouent un rôle d'autant moins important que la croissance de $f(z)$ "sur l'axe imaginaire" est lente.

Ce travail donne notamment des conditions abéliennes nécessaires et suffisantes pour les classes de fonction à croissance exponentielle sur l'axe imaginaire, résolvant ainsi complètement le problème posé par Boas dans [1] et [2].

Les procédés utilisés consisteront d'une part dans la théorie de balayage qui permettra d'écrire $\log | f(x) |$ comme le potentiel d'une mesure portée par $x > 0$, et d'autre part dans les méthodes taubériennes de [8]. Le premier procédé amène naturellement à considérer des classes plus générales de fonctions que les fonctions à croissance bornée sur l'axe imaginaire.

Nous allons exposer rapidement les notations associées à ces procédés avant d'en indiquer les résultats.

1. Notations et résultats

1.1. Nous considérerons le groupe des homothéties positives.

Etant donné deux mesures $\mathbf{dn}$ et $\mathbf{dm}$ portées par l'axe réel positif nous considérerons leur produit qui sera la mesure notée $\mathbf{dn} * \mathbf{dm}$ et définie par

1.1.1. $$\int h(\mathbf{dn} * \mathbf{dm}) = \iint h(tt')\mathbf{dm}(t)\mathbf{dn}(t').$$

Si $l(t)$ est une fonction localement sommable, nous lui associons la mesure

1.1.2. $$\mathbf{l} = l(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Received July 23, 1956. Received in revised form January 25, 1957.