FONCTIONS ALÉATOIRES À CORRÉLATION LINÉAIRE

PAR PAUL LÉVY

I. INTRODUCTION

I.1

1°. Un système *laplacien* de variables aléatoires est caractérisé par les deux propriétés suivantes: chaque variable dépend de la loi de Laplace[1], et la corrélation entre les différentes variables est linéaire. Les fonctions aléatoires laplaciennes d'une ou plusieurs variables, ou d'un point d'un espace quelconque, sont caractérisées par les deux mêmes propriétés. Nous nous proposons d'étudier les fonctions ou les systèmes de variables obtenus en abandonnant la première propriété, et en ne conservant que la corrélation linéaire.

Plusieurs définitions de cette notion sont possibles. Nous dirons d'abord qu'une variable aléatoire Y *dépend linéairement* d'un système de variables X_ν si elle est de la forme $U + V$, U étant une fonctionnelle linéaire certaine, presque sûrement bien définie, des X_ν, et V étant indépendant de ces variables. Dans ce cas, Y peut aussi être représenté par $U_1 + V_1$, avec

$$U_1 = U + c, \qquad V_1 = V - c,$$

c étant un nombre certain, et il n'y a pas d'autre représentation de la même forme. Précisons que U peut être identiquement nul. L'indépendance de Y par rapport aux X_ν est donc un cas particulier de la dépendance linéaire.

Si les X_ν sont en nombre infini, la définition de U implique la convergence presque sûre d'une certaine expression, série ou intégrale, et il peut arriver que cette condition ne soit pas vérifiée quand les X_ν sont tous nuls. C'est seulement dans le cas où, pour les X_ν tous nuls, U prend une valeur bien définie u_0, qu'on peut mettre U sous la forme $U_0 + u_0$, et ramener son étude à celle d'une fonction linéaire et homogène des X_ν. Dans le cas général, on peut arriver à un résultat analogue en exprimant U en fonction de variables auxiliaires $X_\nu - a_\nu$ (les a_ν étant des nombres certains). Malgré cela, nous ne pourrons pas toujours nous contenter de considérer les cas où U est une fonction linéaire et homogène des variables choisies.

Dans le cas laplacien, on peut supposer toutes les variables semi-réduites, et prendre pour U la valeur probable conditionnelle de Y quand les X_ν sont

---

Received November 19, 1956. Footnotes 6 and 10 and a few lines in n^{os} II.2.3°, III.6.3° and III.8.2° modified in proof.

[1] La *loi de Laplace* est la loi souvent appelée loi de Gauss, ou loi normale. Une variable aléatoire X, laplacienne ou non, sera dite semi-réduite si $E(X) = 0$, et réduite si de plus $E(X^2) = 1$. Les variables laplaciennes réduites seront désignées par les lettres ξ ou η, avec ou sans indices, et les différentes variables ξ_ν et η_ν qui interviennent dans une même expression analytique seront toujours supposées indépendantes les unes des autres.