Vol. 97, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL

VARIATION DE LA HAUTEUR DE FALTINGS DANS UNE CLASSE DE $\overline{\mathbb{Q}}$-ISOGÉNIE DE COURBE ELLIPTIQUE

LUCIEN SZPIRO AND EMMANUEL ULLMO

1. Introduction. Soit E une courbe elliptique sur un corps de nombres K de discriminant minimal Δ_E. Pour chaque place à l'infini σ de K, on choisit τ_σ dans le demi-plan de Poincaré tel que $E \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_\sigma$. La hauteur de Faltings $h(E)$ est donné explicitement par la formule

$$h(E) = \frac{1}{12}\frac{\log N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_E}{[K:\mathbb{Q}]} - \sum_\sigma \frac{1}{12}\frac{\log\left|\Delta(\tau_\sigma)\,\mathrm{Im}(\tau_\sigma)^6\right|}{[K:\mathbb{Q}]} \tag{1}$$

où Δ est la fonction discriminant et $N_{K/\mathbb{Q}}$ désigne la norme de K à $\mathbb{Q}$. Pour tout corps de nombres K, on note $\overline{K}$ sa clôture algébrique et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu. On étudie dans ce papier la variation de la hauteur de Faltings dans une classe de $\overline{K}$-isogénie. On obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soit E une courbe elliptique semi-stable sur un corps de nombres K et sans multiplication complexe. Soit n un entier et $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. Soit P un point de torsion de E d'ordre n défini sur le corps $K(P)$. Soit $\pi: E \longrightarrow E'$ la $K(P)$-isogénie dont le noyau est le sous-groupe engendré par P. Si le groupe G_K agit transitivement sur les points d'ordre n, on a*

$$h\big(E'\big) = h(E) + \frac{\log n}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i}-1}{\big(p_i^2-1\big)p_i^{\alpha_i-1}}\log p_i. \tag{2}$$

De manière générale on a

$$h\big(E'\big) = h(E) + \frac{\log n}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i}-1}{\big(p_i^2-1\big)p_i^{\alpha_i-1}}\log p_i + O(1) \tag{3}$$

où $O(1)$ ne dépend que de la courbe elliptique E.

On peut remarquer [7] que les propriétés élémentaires de la hauteur de Faltings nous assurent qu'avec les hypothèses précédentes, on a toujours des inégalités de la forme

$$h(E) - \frac{\log n}{2} \le h\big(E'\big) \le h(E) + \frac{\log n}{2}.$$

Reçu le 11 juin 1997. Révision reçu le 22 octobre 1997.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 11G05, 11R32. Secondary 14G40, 14H52.