Vol. 85, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © November 1996

ISOTROPIE DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES DE DIMENSIONS 7 ET 8 SUR LE CORPS DES FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE

AHMED LAGHRIBI

1. Introduction. Soit F un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$. Etant donné une forme quadratique ϕ anisotrope sur F, un problème important est de caractériser les formes quadratiques ψ telles que ϕ devienne isotrope sur le corps des fonctions de la quadrique projective d'équation $\psi = 0$.

Ce problème a été complètement résolu par D. Leep [15] et D. W. Hoffmann [6] lorsque $\dim \phi \leqslant 5$; Hoffmann a obtenu des résultats partiels pour $\dim \phi = 6$ [9], ainsi que pour $\dim \phi$ quelconque [7]. Dans ce travail nous considérons le cas où $\dim \phi = 8$, $d_{\pm}\phi = 1$ et $\operatorname{ind} C(\phi) \leqslant 4$, $d_{\pm}\phi$ et $C(\phi)$ étant respectivement le discriminant à signe et l'algèbre de Clifford de ϕ (voir la section 2 pour un rappel des notations et définitions). Pour traiter ce cas, on utilise les isomorphismes $e^2\colon I^2F/I^3F \xrightarrow{\sim} H^2F$ [17] et $e^3\colon I^3F/I^4F \xrightarrow{\sim} H^3F$ [18], ainsi que le calcul des noyaux cohomologiques $\operatorname{Ker}(H^2F \to H^2K)$ et $\operatorname{Ker}(H^3F \to H^3K)$ où K est le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de $C(\phi)$. Les résultats principaux sont les suivants.

THÉORÈME 1. *Soit ϕ une forme quadratique anisotrope sur F de dimension 8 avec $d_{\pm}\phi = 1$ et $\operatorname{ind} C(\phi) \leqslant 4$. Soit ψ une forme quadratique anisotrope de dimension $\geqslant 3$ ($\geqslant 5$ si $\operatorname{ind} C(\phi) = 4$). Alors:*

(A) *$\phi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si il existe une forme quadratique ψ' de dimension 8 telle que $\psi' > \psi$, $d_{\pm}\psi' = 1$ et $\phi_{F(\psi')}$ soit isotrope. En particulier $\dim \psi \leqslant 8$ (cf. Hoffmann [7, Théorème 1]).*

(B) *Supposons que $\dim \psi = 8$. On distingue deux cas:*
   (1) *ψ est semblable à une 3-forme de Pfister π. Alors $\phi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ϕ contient une voisine de π.*
   (2) *ψ n'est pas semblable à une 3-forme de Pfister. Alors $\phi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ϕ et ψ sont conjuguées (au sens de la définition 6 ci-dessous).*

THÉORÈME 2. *Soit ϕ une forme quadratique anisotrope sur F de dimension 8 avec $d_{\pm}\phi = 1$. Soit ψ une forme quadratique anisotrope de dimension 3. Alors, on a équivalence entre:*

(i) *$\phi_{F(\psi)}$ est isotrope;*

(ii) *ψ est semblable à une sous-forme d'une 3-forme de Pfister dont ϕ contient une voisine ou ψ est semblable à une sous-forme d'une forme ψ' de dimension 8 telle que $\phi \perp \psi' \perp \pi \in I^4F$ pour $\pi \in GP_3F \cap W(F(\psi)/F)$.*

Reçu le 12 janvier 1995. Révision reçue le 5 mars 1996.