Vol. 84, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © July 1996

ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS PARABOLIQUES ET BLOCS CONFORMES

CHRISTIAN PAULY

1. Introduction. Soit C une courbe irréductible, projective et lisse sur $\mathbb{C}$ de genre $g \geqslant 2$. Dans [BL], Beauville et Laszlo ont construit un isomorphisme canonique entre d'une part un espace vectoriel, appelé espace des blocs conformes, étudié en théorie conforme des champs, et d'autre part l'espace de sections d'un fibré en droites sur l'espace des modules $\mathcal{SU}_C(r)$ des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de déterminant trivial. Par analogie avec le cas du rang $r = 1$, on appelle ces sections *fonctions thêta généralisées.*

Le but de cet article est d'étendre cet isomorphisme aux espaces de modules de fibrés paraboliques semi-stables $\mathcal{M}(r, k, \vec{a}, \vec{n})$ introduits par Mehta et Seshadri [MS] (voir section 2). Ces espaces de modules dépendent d'un ensemble fini I de points de C, appelés points paraboliques, et d'entiers $(k, \vec{a}, \vec{n})$, appelés poids paraboliques, donnant la condition de stabilité pour fibrés paraboliques. On peut construire (voir section 3) de manière canonique un fibré en droites ample Θ sur l'espace de modules $\mathcal{M} := \mathcal{M}(r, k, \vec{a}, \vec{n})$.

La théorie conforme des champs [TUY] associe à un ensemble fini I de points de C et à un ensemble $\vec{\lambda} = \{\lambda_x\}_{x \in \mathrm{I}}$ de poids dominants de l'algèbre de Lie simple $sl_r(\mathbb{C})$ un espace vectoriel $V_C(\mathrm{I}, \vec{\lambda})$, appelé espace des blocs conformes. Ces espaces sont définis à l'aide de représentations des algèbres de Kac-Moody affines. Le résultat principal (corollaire 6.7) est qu'il existe un isomorphisme canonique entre le dual de $V_C(\mathrm{I}, \vec{\lambda})$ et l'espace des sections globales $H^0(\mathcal{M}, \Theta)$. Les poids dominants $\vec{\lambda} = \{\lambda_x\}_{x \in \mathrm{I}}$ dépendent des poids paraboliques $(k, \vec{a}, \vec{n})$. Rappelons que les espaces de blocs conformes satisfont aux règles de factorisation [TUY], ce qui a permis d'établir, d'une manière combinatoire, une formule, dite formule de Verlinde, qui donne leur dimension [B].

L'idée de la démonstration est la suivante: soit z une coordonnée locale autour d'un point $p \in C$ et A_C l'anneau des fonctions algébriques sur $C - p$, qui se plonge dans $\mathbb{C}((z))$ en associant à une fonction son développement de Laurent en p. En remarquant qu'un fibré de déterminant trivial est trivial sur $C - p$ et sur un "voisinage" de p, on peut montrer que le double quotient $SL_r(A_C)\backslash SL_r(\mathbb{C}((z)))/SL_r(\mathbb{C}[[z]])$ est en bijection avec les classes d'isomorphisme de fibrés de rang r et de déterminant trivial. Cette construction peut se faire dans le contexte des champs et peut être mise en relation avec l'espace (resp., champ) de modules de fibrés (voir section 4).

Reçu le 13 février 1995. Révision reçue le 16 juin 1995.