Vol. 83, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © June 1996

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS ET QUOTIENTS DES GROUPES HYPERBOLIQUES

THOMAS DELZANT

0. Introduction. Le but de cet article est d'étudier les sous-groupes distingués et les quotients des groupes hyperboliques au sens de Gromov, en élargissant le cadre usuel de la théorie de la petite simplification [LS].

Au paragraphe 5 de [Gr], M. Gromov esquisse déja une telle étude, mais les méthodes qui y sont employées semblent difficile à comprendre en toute généralité (voir à ce sujet l'introduction de [GH]). En particulier le théorème 5.3.E de [Gr] sur les sous-groupes normaux est inexact, comme le montre un contre-exemple présenté en appendice; ce même contre-exemple répond d'ailleurs par la négative à une question de M. Gromov (5.3D dans [Gr]). Nous proposons de remplacer l'énoncé 5.3.E de [Gr] par le théorème suivant, où l'on note $[[f]]$ la norme stable d'un élément (voir le paragraphe 3).

THÉORÈME I. *Soit G un groupe δ-hyperbolique non élémentaire. Il existe un entier N tel que, pour toute famille d'éléments $f_1, \dots, f_n$ tels que $[[f_i]] = [[f_j]] \geqslant 1000\delta$, le sous-groupe normal $\langle\langle f_i^N \rangle\rangle$ engendré par les puissances N-ièmes de ces éléments soit libre; de plus, pour tout entier k, le quotient $G/\langle\langle f_i^{kN} \rangle\rangle$ est hyperbolique.*

La démonstration que nous exposons de ce résultat repose sur l'étude des *conditions de petite simplification* dans les groupes hyperboliques; là encore, il convient de préciser que M. Gromov indique dans [Gr] comment aborder ce problème. Cependant aucune définition précise de ces conditions n'apparait dans [Gr], sauf dans le cas des groupes fondamentaux des variétés compactes à courbure négative. On développe au second paragraphe une version adaptée aux groupes hyperboliques de cette théorie; après avoir défini la condition de petite simplification $C'(l)$ en terme de produit scalaire, on démontre:

THÉORÈME II. *Soit $\mathcal{R}$ une famille d'éléments satisfaisant la condition de petite simplification $C'(l)$. Le sous-groupe normal $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ engendré par $\mathcal{R}$ est libre. Le groupe quotient $G/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ est hyperbolique.*

La démonstration de ce théorème repose sur celle du lemme 2.4, très analogue au lemme de Greendlinger, fondement de la théorie ordinaire de la petite simplification [LS]; pour en déduire le premier théorème, il s'agit alors de montrer qu'il existe un entier N tel que, pour toute famille d'éléments f_1, f_2, f_n de même norme stable $[[f_i]] = [[f_j]] > 1000\delta$, la famille des f_i^N satisfait une condition de

Reçu le 3 mai 1991.