Vol. 80, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © November 1995

COMPARAISON DES MÉTRIQUES D'ARAKELOV ET DE POINCARÉ SUR $X_0(N)$

AHMED ABBES ET EMMANUEL ULLMO

1. Introduction. Soit $N \geqslant 1$ un entier. La courbe $X_0(N)$ est la compactification de l'espace de module des courbes elliptiques muni d'un sous-groupe cyclique d'ordre N. Elle a une structure de courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$. Si $N \notin \{1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$ $X_0(N)$ est de genre g non nul. La courbe $X_0(N)$ sur $\mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe au quotient $\Gamma_0(N) \backslash (\mathscr{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{Q}))$, où $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré et $\Gamma_0(N)$ est le sous-groupe modulaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}; ad - Nbc = 1 \right\}.$$

L'espace $H^0(X_0(N)_{\mathbb{C}}, \Omega^1)$ où Ω^1 est le faisceau des différentielles holomorphes sur $X_0(N)_{\mathbb{C}}$ s'identifie au moyen du q-développement avec l'espace $\mathscr{S}(2, \Gamma_0(N))$ des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Ce dernier est muni du produit scalaire de Peterson défini pour f et g dans $\mathscr{S}(2, \Gamma_0(N))$ par

$$\langle f, g \rangle = \int_{X_0(N)} y^2 f(z) \bar{g}(z)\, d\mu_0(z),$$

où $d\mu_0(z) = (dx\, dy)/y^2$ est la métrique de Poincaré.

Les opérateurs de Hecke T_p, pour les premiers p ne divisant pas N, agissent sur $\mathscr{S}(2, \Gamma_0(N))$. Ce sont des opérateurs auto-adjoints pour le produit scalaire de Peterson. Les formes primitives sont les formes propres pour les opérateurs T_p, orthogonales à l'espace des formes anciennes et normalisées par $a_1 = 1$ (a_1 est le premier coefficient du q-développement). On prouve dans la première section le théorème suivant.

Théorème A. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout entier m sans facteurs carrés et pour toute forme primitive f de $\Gamma_0(m)$, on a*

$$\sup_{z \in \mathscr{H}} |y f(z)| \leqslant C_\varepsilon m^{1/2+\varepsilon}.$$

Received 29 November 1994. Revision received 21 March 1995.