Vol. 79, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © July 1995

HAUTEURS ET MESURES DE TAMAGAWA SUR LES VARIÉTÉS DE FANO

EMMANUEL PEYRE

Soient k un corps de nombres et V une variété de Fano sur k telle que l'opposé du faisceau canonique ω_V^{-1} soit très ample. A toute base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ correspond une hauteur $\mathbf{h}$ sur V. Pour tout ouvert non vide U de V, on note

$$n_U(H) = \#\{P \in U(k) | \mathbf{h}(P) \leqslant H\}.$$

Manin a conjecturé qu'à condition de se restreindre à un ouvert suffisamment petit U, le comportement asymptotique de ce cardinal est de la forme

$$n_U(H) \sim CH \log^{t-1} H$$

où t désigne le rang du groupe de Picard de V. Il faut noter que la constante qui apparaît dans cette estimation dépend des choix faits lors de la construction de la hauteur. Toutefois il est possible de donner une expression conjecturale de cette constante. Pour cela, on part de la donnée naturelle pour définir une hauteur, c'est-à-dire un système de métriques sur les opposés des fibrés canoniques des variétés $V \times_k k_v$. Un tel système de métriques permet de définir des mesures sur ces variétés. D'une manière analogue à celle décrite par Weil pour les groupes algébriques (cf. [We]) ou utilisée par Heath-Brown et Swinnerton-Dyer dans le cas de surfaces cubiques (cf. [HB], [SD]), on construit à l'aide de ces mesures locales une mesure de Tamagawa sur l'espace adélique associé à V. La constante conjecturale s'exprime alors en termes du volume de l'adhérence des points rationnels. La conjecture ainsi raffinée est stable par produit de variétés, redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées. Elle est également compatible avec les résultats de la méthode du cercle, ainsi qu'avec le test numérique réalisé par Heath-Brown pour certaines surfaces cubiques.

Dans le cas des variétés de drapeaux ou celui des intersections complètes lisses de grande dimension, le résultat est indépendant de l'ouvert choisi. En particulier, on peut prendre $U = V$. Cela n'est plus possible lorsque la variété contient des sous-variétés accumulatrices. Les exemples les plus simples de telles variétés sont obtenues par éclatement. Il nous a donc semblé intéressant de vérifier la conjecture de Manin raffinée pour les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ ainsi que pour la variété obtenue en éclatant les

Reçu le 12 novembre 1993. Révision reçu le 11 janvier 1995.