Vol. 73, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © January 1994

UNE FORMULE DE POISSON POUR LES VARIÉTÉS DE HEISENBERG

HUBERT PESCE

Introduction. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami opérant sur $C^\infty(M)$. Alors Δ possède un spectre discret $\Delta - \mathrm{Sp}(M, g)$ qui est un invariant riemannien. Un des problèmes de la géométrie spectrale est de savoir dans quelle mesure le spectre détermine la géométrie de la variété. Pour attaquer ce problème, les formules de trace se sont avérées être un outil particulièrement efficace. L'idée est la suivante on peut définir un spectre de nature beaucoup plus géométrique qui s'appelle le spectre des longueurs. Si (M, g) est une variété riemannienne, on appelle spectre des longueurs de (M, g) l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. Si une longueur ℓ est comptée avec une multiplicité égale au nombre de géodésiques périodiques de longueur ℓ, on notera $L - \mathrm{Sp}(M, g)$ le spectre des longueurs. Par contre, si une longueur ℓ est comptée avec une multiplicité égale au nombre de classes d'homotopie libre dont la courbe la plus courte est de longueur ℓ, on notera $[L] - \mathrm{Sp}(M, g)$ le spectre des longueurs.

Le lien entre le spectre du Laplacien et le spectre des longueurs s'observe facilement dans le cas où (M, g) est un tore plat $\Gamma\backslash\mathbb{R}^n$. On a alors la formule de Poisson [1]: pour tout $t > 0$,

$$\sum_{\lambda \in \Delta - \mathrm{Sp}(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n)} e^{-\lambda t} = \frac{\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n)}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot \sum_{\ell \in [L] - \mathrm{Sp}(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n)} e^{-\ell^2/4t}.$$

Un analogue de cette formula existe pour les espaces localement symétriques de rang 1, c'est la formule des traces de Selberg [4], [7], et [10]. Une des conséquences de ces formules est que, pour les variétés précédemment citées, le spectre du Laplacien détermine le spectre des longueurs. En fait, Y. Colin de Verdière a montré que, de manière générique, le spectre du Laplacien, $\Delta - \mathrm{Sp}(M, g)$, détermine le spectre des longueurs $L - \mathrm{Sp}(M, g)$ [3]. Il montre même que $\Delta - \mathrm{Sp}(M, g)$ détermine l'indice de Morse modulo 4 des géodésique périodiques. Sa méthode consiste à étudier la solution fondamentale de l'équation de la chaleur complexe et à utiliser la méthode de la phase stationnaire (pour des méthodes utilisant l'équation des ondes, voir [2] et [5]).

Dans cet article, on s'intéresse au cas des variétés de Heisenberg, c'est-à-dire aux variétés du type $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ où H_n est le groupe de Heisenberg de dimension $2n + 1$,

Reçu le 19 Julliet 1993.