Vol. 72, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © November 1993

VARIÉTÉS SPHÉRIQUES ET THÉORIE DE MORI

MICHEL BRION

Introduction. Ce travail étudie les variétés avec action d'un groupe algébrique réductif, et en particulier les variétés sphériques, du point de vue de la "théorie de Mori" (voir [KMM]). Pour les variétés toriques, le sujet a été abordé par M. Reid (voir [Re]); un objectif de ce travail est de montrer que certains résultats de Reid restent valables dans un cadre plus général.

Par exemple, lorsqu'un groupe réductif connexe G opère dans une variété projective X avec une orbite dense, et lorsqu'un sous-groupe de Borel B de G a une orbite de codimension au plus 1 dans X, alors le cône des 1-cycles effectifs $NE(X)$ est polyédral, et toute arête de $NE(X)$ est engendrée par une courbe rationnelle, stable par B (voir 1.4 ci-après). En prenant pour G un tore, on retrouve le "théorème du cône" de [Re, 1.7]. Si de plus X est sphérique, c'est-à-dire si B a une orbite dense dans X, alors toute face du cône $NE(X)$ peut être contractée (voir 3.1). En outre, dans les variétés sphériques $\mathbf{Q}$-factorielles, les flips (généralisés) existent toujours, et toute suite de flips orientés est finie (voir 4.7).

Les démonstrations de ces résultats ne sont pas difficiles, grâce aux propriétés de finitude des diviseurs sur les variétés sphériques (voir les lemmes 3.1 et 4.3). Cependant, les morphismes birationnels "sphériques" sont de nature plus compliquée que les morphismes toriques. En effet, dans une variété torique X, la contraction d'une arête de $NE(X)$ consiste à identifier deux points fixes du tore. Par contre, dans une variété sphérique, on peut contracter une orbite fermée sans l'identifier à une autre orbite fermée; voir 3.5, 4.4 et 4.5 pour des exemples. De telles contractions sont décrites en 3.4, en termes des éventails coloriés associés aux variétés sphériques. Afin de ne pas alourdir (encore) les notations, on s'est limité au cas "absolu" d'une variété sphérique projective; nos résultats peuvent s'étendre à un morphisme birationnel équivariant, entre deux variétés sphériques.

La géométrie d'une variété sphérique n'est pas gouvernée par sa dimension, mais par son rang; il s'agit de la codimension minimale d'une orbite de U dans X, où U désigne un sous-groupe unipotent maximal de G. Des phénomènes intéressants se produisent déjà en rang 1 ou 2, ce qui facilite la construction d'examples en dimension arbitraire; renvoyons à 4.4 pour des exemples de flips en rang 2, et en dimension 3. On étudie en 4.5 les flips entre variétés sphériques de rang un; en particulier, on construit ainsi des flips et des flops entre variétés lisses, qui généralisent des exemples classiques (voir [Fr]).

Voici maintenant un résumé des trois premières parties de ce travail; on a déjà donné un aperçu de la quatrième partie. On étudie d'abord les cycles algébriques

Reçu le 6 juillet 1992.