Vol. 69, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © January 1993

DÉCOMPOSITION DU FIBRÉ NORMAL DES SURFACES LISSES DE $\mathbb{P}_4$ ET STRUCTURES DOUBLES SUR LES SOLIDES DE $\mathbb{P}_5$

BÉNÉDICTE BASILI ET CHRISTIAN PESKINE

Quelles sont les variétés lisses, compactes, de codimension 2 dans l'espace projectif complexe, dont le fibré normal est décomposé, i.e. telles qu'il existe deux familles d'hyperplans tangents partout transverses? Il n'y a pas l'ébauche d'une réponse, ni même de conjecture satisfaisante, dans le cas des courbes de l'espace. Pour les variétés de dimension $\geqslant 3$, on vérifie facilement que la décomposition du fibré normal caractérise les intersections complètes. Nous démontrons ici qu'il en est de même pour les surfaces de $\mathbb{P}_4$ (Théorème A).

Plus généralement, on voudrait déterminer les variétés dont le fibré normal est extension de deux fibrés inversibles. C'est évidemment le cas pour toutes les courbes de l'espace. On connait de nombreux exemples pour les surfaces de $\mathbb{P}_4$, mais ils ne suggèrent pas de classification. Pour les variétés de dimension $\geqslant 4$, on voit aisément que cette propriété caractérise les intersections complètes. Pour une telle variété de dimension 3, nous montrons l'existence d'une structure double, section d'un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_5$, ce fibré étant décomposable si et seulement si la variété est intersection complète (Théorème B).

Nous remercions Geir Ellingsrud et Gianni Sacchiero pour leur aide et leur patience.

1. Décomposition du fibré normal des surfaces lisses de $\mathbb{P}_4$.

THÉORÈME A. *Une surface lisse de $\mathbb{P}_4$ dont le fibré normal est décomposé est une intersection complète.*

Remarque. Nous ne revenons pas sur la réciproque de cet énoncé qui est évidente.

Soient S une telle surface et $N_S = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$ son fibré normal. Nous prouvons d'abord que $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont numériquement dépendants de $\mathscr{O}_S(1)$ (Lemme 2 et Lemme-clef), c'est l'essentiel de la démonstration.

Si X est une variété lisse de $\mathbb{P}_n$ et $\mathscr{I}_X$ son faisceau d'idéaux, nous noterons $\tilde{X}$ le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_n$ dont le faisceau d'idéaux est $\mathscr{I}_X^2$.

LEMME 1. *Soit X une variété lisse de $\mathbb{P}_n$. L'application naturelle $\Omega_{\mathbb{P}_n} \otimes \mathscr{O}_X \to \Omega_{\tilde{X}} \otimes \mathscr{O}_X$ est un isomorphisme et $H^1(\Omega_{\tilde{X}} \otimes \mathscr{O}_X) \simeq \mathbb{C}$.*

Reçu le 6 avril 1992.

Travail partiellement réalisé dans le cadre d'un projet NAVF (the Royal Norwegian Council for Fundamental Research).