Vol. 61, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © August 1990

MÉTRIQUES SUR LES FIBRÉS D'INTERSECTION

R. ELKIK

Ce travail fait suite à l'article [E], auquel nous référons constamment. Comme le précédent il est inspiré par [De] et remplit une partie du programme qui y est proposé.

Rappelons d'abord brièvement l'objet de [E]: considérons un morphisme projectif Cohen Macaulay de dimension d, $f\colon X \to S$, et un ensemble $\mathscr{E}$ de fibrés vectoriels sur X. Si m est un polynôme homogène de degré $d+1$, en les variables $c_n(E)$, $k \in \mathbb{N}$, $E \in \mathscr{E}$ (avec bien sûr c_k de poids k), on a construit un fibré en droites sur S noté $I_{X/S}(m)$ qui représente "l'intégrale de m" le long des fibres de f.

Nous supposons ici que f est un morphisme projectif lisse de schémas lisses sur $\mathbb{C}$, et que $\mathscr{E}$ est un ensemble de fibrés vectoriels hermitiens. Nous définissons alors une métrique sur le fibré $I_{X/S}(m)$ dont la première forme de Chern est égale à $\int_{X/S} m$. Notons tout de suite que l'abus de notation précédent sera systématique: $c_k(E)$ placé derrière $I_{X/S}$ désigne le symbole considéré en [E, V.3], derrière $\int_{X/S}$, il désigne la k$^{\text{e}}$ forme de Chern du fibré hermitien E.

De plus si $(\Sigma)\colon 0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés de $\mathscr{E}$, n un entier et m un polynôme, comme plus haut, mais de degré $d+1-n$ on a construit ([E] V.4.8) un isomorphisme de multiplicativité ψ de $I_{X/S}(c_n(F)m)$ sur $\otimes_{n'+n''=n} I_{X/S}(c_{n'}(F')C_{n''}(F'')m)$. Dans la situation hermitienne, on verra que la norme de l'isomorphisme ci-dessus est donnée par: $\operatorname{Log}\|\psi\|^2 = \int_{X/S} m\tilde{c}_n(\Sigma)$ où $\tilde{c}_n(\Sigma)$ est la n^{e} forme de Bott-Chern secondaire de l'extension (Σ).

Le plan de ce travail présente des analogies avec celui de [E].

Dans une première partie nous traitons en effet le cas des fibrés en droites sur X. Dans la partie III, nous munissons d'abord d'une métrique le fibré d'intégration d'un produit de classes de Segre de fibrés hermitiens, et étudions ses propriétés; le passage aux classes de Chern est essentiellement formel. La partie II, contient un rappel sur les formes secondaires de Bott-Chern et quelques calculs nécessaires dans la suite. Il nous a semblé utile pour la commodité du lecteur d'inclure au début des parties I et III une liste des résultats de [E] qui sont utilisés ensuite.

Notons que les résultats présentés ci-dessous, recouvrent une partie de ceux obtenus par des méthodes différentes par Gillet et Soulé ([GS1] et [GS2]) et qui résultent de leur théorie du "groupe de Chow arithmétique": avec les notations précédentes, supposons pour simplifier S quasi projectif sur $\mathbb{C}$, (les fibrés $\mathscr{E}$ étant toujours des fibrés vectoriels hermitiens sur X); à l'élément m considéré ci-dessus, Gillet et Soulé associent un élément du groupe de Chow arithmétique $\widehat{CH}^{d+1}(X)$ que nous noterons $\hat{m}$ et dont l'image $f_*(\hat{m})$ appartient à $\widehat{CH}^1(S)$; ce dernier groupe

Received December 22, 1988. Revision received September 5, 1989.