Vol. 59, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © December 1989

SUR LA CONJECTURE PRINCIPALE ANTICYCLOTOMIQUE

J. TILOUINE

0. Introduction. La conjecture principale à deux variables pour un corps quadratique imaginaire vient d'être démontrée par K. Rubin en s'inspirant d'idées de Kolyvagin et Thaine qui font un usage essentiel des unités elliptiques. Dans ce travail, nous montrons la conjecture principale pour la variable anticyclotomique (une des deux variables) par une méthode complètement différente.

Rappelons l'énoncé de la conjecture principale à deux variables. Soit K un corps quadratique imaginaire, p un nombre premier rationnel impair et $K_{(p^\infty)}$ la réunion des corps de rayons $K_{(p^n)}$ de K de conducteur p^n, $n = 1, 2, \ldots$. Pour tout n, fini ou infini soit $\mathscr{G}_n = \mathrm{Gal}(K_{(p^n)}/K)$; le groupe de Galois $\mathscr{G}_\infty$ est alors un groupe de Lie p-adique de dimension 2, ce qui explique la présence de deux variables paramétrant $\mathscr{G}_\infty$. Si l'on suppose que le nombre premier p se décompose dans K, on dispose d'une fonction L p-adique G construite par Katz et Yager, puis par de Shalit (voir [21] et §2 due texte ci-dessous). C'est un élément de $\mathbf{D}[[\mathscr{G}_\infty]]$, où $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}_p$ est un anneau de valuation discrète contenant $\mathbb{Z}_p$. On suppose désormais p décomposé dans K. Fixons un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K divisant p. Soit M la p-extension abélienne maximale de $K_{(p^\infty)}$ non ramifiée hors des places au-dessus de $\mathfrak{p}$. Le groupe de Galois $X = \mathrm{Gal}(M/K_{(p^\infty)})$ a une structure naturelle de module sur l'anneau $\Lambda_2 = \mathbb{Z}_p[[\mathscr{G}_\infty]]$, et il est de type fini et de torsion. Il admet donc un idéal caractéristique $\mathrm{car}(X) \subset \Lambda_2$. La conjecture à deux variables s'énonce alors:

Conjecture 0.1. *L'élément G de $\mathbf{D} \otimes \Lambda_2$ est un générateur de l'idéal* $\mathrm{car}(X)$ *de* $\mathbf{D} \otimes \Lambda_2$.

Pour expliquer notre résultat, nous introduisons quelques notations. Rappelons que $K_{(p^\infty)}$ est le composé de l'extension cyclotomique $K(\zeta_{p^\infty})$ de K, et de l'extension "anticyclotomique" $K(p^\infty)$ de K, réunion des extensions de K contenues dans $K_{(p^\infty)}$ diédrales sur $\mathbb{Q}$. Posons $\mathscr{G}_\infty^+ = \mathrm{Gal}(K(\zeta_{p^\infty})/K)$ et $G_\infty = \mathrm{Gal}(K(p^\infty)/K)$; ce sont des groupes de Lie p-adiques de dimension 1. Soit h le nombre de classes de K. Supposons que p ne divise pas $2h$. On a canoniquement $\mathscr{G}_\infty = \mathscr{G}_1 \times \Gamma$ où $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^2$ et $\mathscr{G}_1$ est fini, resp. $\mathscr{G}_\infty^+ = \mathscr{G}_1^+ \times \Gamma^+$, $G_\infty = G_1 \times \Gamma^-$ où $\Gamma^+ \simeq \mathbb{Z}_p$, $\Gamma^- \simeq \mathbb{Z}_p$ et $\mathscr{G}_1^+$ et G_1 sont finis. De plus, les restrictions à $\mathscr{G}_\infty^+$ et G_∞ induisent un isomorphisme $\Gamma \simeq \Gamma^+ \times \Gamma^-$. Nous fixons des générateurs topologiques γ^+ et γ^- de Γ^+ et Γ^- correspondant à $u = 1 + p$ par le symbole d'Artin de $K(\zeta_{p^\infty})/K$ resp. $K(p^\infty)/K$ (voir la fin du §1). Pour tout caractère χ de $\mathscr{G}_1$, si $\mathbf{D}[\chi]$ est l'anneau engendré dans $\mathbb{C}_p$ per les valeurs de χ sur $\mathbf{D}$, on peut identifier $\mathbf{D}[\chi][[\Gamma]]$ à $\mathbf{D}[\chi][[S, T]]$ par $\gamma^+ \to 1 + S$ et $\gamma^- \to 1 + T$, et voir ainsi l'image $\chi(G)$ de G dans $\mathbf{D}[\chi][[\Gamma]]$ comme une série formelle à deux variables $G_\chi(S, T) \in \mathbf{D}[\chi][[S, T]]$. La variable S est appelée la variable cyclotomique