

REMARQUES SUR LE PROBLEME EXTERIEUR DE PLATEAU

ROMAIN KRUST

0. Introduction. Soit C une courbe de Jordan du plan \mathbf{R}^2 , U la composante connexe non bornée de $\mathbf{R}^2 - C$, et f une fonction continue définie sur ∂U . Le problème extérieur de Plateau consiste à déterminer les prolongements \mathbf{f} de f à U qui vérifient l'équation des surfaces minimales:

$$(E) \quad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

La première partie de cet article est consacrée à quelques rappels, notamment en ce qui concerne le comportement à l'infini des solutions. Osserman [6] a montré que le graphe d'une telle fonction est conformément équivalent à un disque épointé, de courbure totale finie, et admet en conséquence un vecteur normal limite $N(\mathbf{f})$ à l'infini. Ceci entraîne que \mathbf{f} admet un développement asymptotique logarithmique dans la direction de $N(\mathbf{f})$. Récemment, R. Langevin et H. Rosenberg [4] ont prouvé un principe du maximum à l'infini.

Dans une seconde partie, ces résultats seront mis à profit pour montrer que les graphes des solutions ayant un vecteur normal limite donné forment, s'il en existe, un feuilletage de la région de l'espace qu'ils recouvrent (Théorème 1). Puis, nous montrerons que sous certaines hypothèses, et en utilisant un théorème d'existence de Jenkins et Serrin [3], \mathbf{f} admet des déformations dont l'origine est soit une déformation de f , soit une variation du rapport logarithmique de \mathbf{f} . Ce résultat donne en particulier une condition suffisante pour l'existence de solution.

Généralisant les résultats de [4], nous prouverons dans la troisième partie une majoration du rapport logarithmique d'une solution en fonction de la longueur de C et de l'angle formé par le vecteur normal limite et l'axe vertical (Théorème 3). La recherche des cas d'égalité nous conduira enfin à montrer l'existence, si C est suffisamment régulière et de courbure strictement positive, d'une fonction f définie sur ∂U , unique à une constante additive près, pour laquelle le problème extérieur de Plateau admet une solution de vecteur normal limite donné, et dont le graphe voit son plan tangent vertical le long de son bord (Théorème 4). C'est par exemple un caténoïde si C est un cercle et si le vecteur normal limite est vertical.

Je souhaite remercier ici le professeur H. Rosenberg pour ses conseils et ses encouragements, ainsi que R. Sa Earp et P. Collin pour les intéressantes conversations que nous avons eues.

Received March 14, 1988. Revision received December 3, 1988.