

CALCUL PARADIFFÉRENTIEL PRÉCISÉ ET APPLICATIONS À DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON SEMILINÉAIRES

J. Y. CHEMIN

0. Introduction

0.1. Nature du problème. Dans ce travail, on se propose de démontrer des théorèmes de régularité pour une solution u suffisamment régulière de l'équation

$$(E) \quad f(x, u, \partial^\beta u)_{|\beta| \leq m} = 0$$

où f est une fonction C^∞ de ses arguments dans le cas de l'ordre 1 ou de la dimension 2.

Dans le cas général, J. M. Bony a, dans [Bo 1], traité de manière complète, aussi bien le problème de la propagation que de l'ellipticité microlocale pour des singularités allant jusqu'au double de la régularité globale de la solution, en montrant leur comportement linéaire vis-à-vis de la géométrie de la variété caractéristique du linéarisé (i.e., l'ensemble des (x, ξ) de $T^*\Omega$ tels que $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \partial f / \partial u_\alpha \cdot \xi^\alpha = 0$).

De nombreux résultats s'affranchissant de cette limitation ont été obtenus, d'une part sous des hypothèses de régularité conormale par rapport à une ou plusieurs hypersurfaces dans le passé, par S. Alinhac dans [Al 1] et [Al 3], et par J. M. Bony dans [Bo 2] et [Bo 3], d'autre part dans le domaine dit d'interaction contrôlée par M. Beals dans [Be 1] et [Be 2], ainsi que dans [Ch 1] et [Ch 2].

On s'intéressera ici au cas des équations d'ordre 1 et à celui de dimension 2, qui a déjà été étudié dans le cas semilinéaire par J. Rauch et M. Reed dans [R-R] et par Tran Huy Ho dans [T-H], et par T. Messer dans le cas quasilineaire dans [Ms].

Pour ce faire, on étudie dans un premier temps un calcul paradifférentiel dit précisé qui s'attaque aux deux points qui limitent a priori les résultats de [Bo 1] aux singularités allant jusqu'au double de la régularité globale de la solution.

Le premier tient au fait que les opérateurs paradifférentiels sont définis a priori, modulo un opérateur ρ -régularisant si la régularité de leur coefficients de plus haut degré est C^ρ . On s'affranchit de cette limitation en localisant un