Vol. 54, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © 1987

SUR LES REPRÉSENTATIONS MODULAIRES DE DEGRÉ 2 DE Gal($\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$)

JEAN-PIERRE SERRE

à Yuri Ivanovich Manin, pour son 50^e anniversaire

Le présent travail reprend, en la précisant, une *conjecture* faite en 1973, dont on trouvera un cas particulier dans [44], §3.

Il s'agit de représentations "modulaires" (au sens de Brauer), de degré 2, du groupe de Galois $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

Si $\rho\colon G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ est une telle représentation, supposée irréductible et de déterminant impair, la conjecture en question affirme que ρ est vraiment "modulaire", i.e. provient d'une forme modulaire parabolique mod p qui est fonction propre des opérateurs de Hecke.

Pour que cet énoncé soit à la fois utilisable et vérifiable numériquement, il est nécessaire de préciser le type de la forme modulaire correspondant à ρ: niveau N, poids k, caractère ε. En ce qui concerne N, les exemples connus suggèrent une réponse simple: N devrait être le *conducteur d'Artin* de ρ (n° 1.2); en particulier, il ne dépendrait que de la ramification de ρ en dehors de p. Une fois N connu, la classe de k mod$(p-1)$, et le caractère ε, s'obtiennent sans difficultés à partir du déterminant de ρ (n° 1.3). Il reste à déterminer la valeur exacte du *poids* k (ou plutôt sa valeur minimale). C'est là une question délicate, qui n'avait pas été abordée dans [44]. Il semble que k ne dépende que de la ramification de ρ en p (exposants des caractères de l'inertie modérée, inertie sauvage, etc); la recette précise que je propose est décrite aux n^{os} 2.2, 2.3 et 2.4.

Les définitions de N, k et ε esquissées ci-dessus font l'objet des §1 et §2. Le §3 contient l'énoncé principal, avec divers compléments. Le §4 explore les conséquences agréables qu'aurait cet énoncé, s'il était vrai: théorème de Fermat, conjecture de Taniyama-Weil, etc. Enfin, le §5 donne un certain nombre d'exemples numériques, pour $p = 2$, 3 et 7.

Ce texte doit beaucoup aux mathématiciens suivants, que j'ai plaisir à remercier:

—John Tate, pour ses nombreuses lettres (notamment en 1973 et 1974) relatives à la conjecture, ainsi qu'aux relations entre poids et inertie en p;

—Jean-Marc Fontaine, dont les résultats sur les représentations locales attachées à la cohomologie ont confirmé les idées de Tate, et ont permis de préciser la valeur du poids k attaché à une représentation;

Received December 5, 1986.