Vol. 53, No. 4 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © December 1986

# PROPAGATION DES SINGULARITES POUR DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS A SYMBOLES REELS

BERNARD LASCAR ET RICHARD LASCAR

**Introduction. Enoncé des résultats.** On considére dans ce travail des résultats de propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques de multiplicité au plus doubles. On considére ici des opérateurs pseudo-différentiels $P$, classiques, proprement supportés, dont le symbole total $\sigma(x, \xi)$ admet un développement $p_m + p_{m-1} + \cdots + p_{m-j} + \cdots$, où $p_{m-j}$ est positivement homogéne de degré $m-j$ par rapport à $\xi$. Le symbole principal $p_m$ sera noté $p$.

$p$ sera supposé réel dans la suite. Les caractéristiques sont l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0; p(x, \xi) = 0 \quad \text{et} \quad dp(x, \xi) = 0\}.$$

Sur $\Sigma$, le symbole sous principal

$$p_{m-1}^s(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) + i/2 \sum_{j=1,\dots,n} \partial^2 p/\partial x_j\, \partial \xi_j(x, \xi)$$

est défini de façon intrinséque.

En polarisant au point $\rho$ de $\Sigma$ le hessien de $p$ par la 2 forme symplectique $\sigma = \sum_{j=1,\dots,n} d\xi_j \wedge dx_j$, on obtient un endomorphisme de $T_\rho(T^*\mathbb{R}^n)$ antisymétrique par rapport à $\sigma$, noté $F_p(\rho)$ et appelé la matrice fondamentale. On a la relation:

$$\nabla^2 p(\rho)(t, t') = \sigma(t, F_p(\rho)t') \quad \text{pour } t \text{ et } t' \text{ élements de } T_\rho(T^*\mathbb{R}^n).$$

Dans le cas des opérateurs de type principal réel, c'est à dire quand $\Sigma = \varnothing$, les singularités se propagent le long des courbes bicaractéristiques de $p$ qui sont les trajectoires du champ hamiltonien $H_p$ défini par:

$$dp(\rho)t = \sigma(t, H_p(\rho)) \quad \text{pour } t \in T_\rho(T^*\mathbb{R}^n).$$

Quand $\Sigma \neq \varnothing$, la situation est beaucoup plus compliquée. Pour ce qui est des travaux abordant ce probléme d'un point de vue assez systématique, notamment lorsque la multiplicité est variable ou lorsque l'on ne peut factoriser $p$ en produits

Received January 13, 1986.