Vol. 50, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © September 1983

UN EXEMPLE DE CHAMP MAGNETIQUE DANS R^ν

ALAIN DUFRESNOY

Dans R^ν, où $\nu \geqslant 2$, on appelle champ magnétique une 2-forme différentielle fermée B à coefficients réels. Si a est une 1-forme différentielle à coefficients réels tels que $da = B$, on considère l'opérateur différentiel $H(a) = -\sum_{j=1}^{\nu}((\partial/\partial x_j) - ia_j)^2$ où $a = \sum_{j=1}^{\nu} a_j\, dx_j$. Cet opérateur, défini sur $C_0(\mathsf{R}^\nu)$, admet un prolongement unique en un opérateur auto-adjoint (non partout défini) sur $L^2(\mathsf{R}^\nu)$, dès que a vérifie des hypothèses de régularité très faibles (cf. [2]). Cet opérateur s'appelle opérateur de Schrödinger associé au champ magnétique B. On vérifie facilement que si on change de forme différentielle a, les opérateurs de Schrödinger correspondants sont unitairement équivalents.

Dans [1], Avron, Herbst et Simon, entre autres résultats, montrent que si le module de B tend vers l'infini à l'infini, et si B vérifie de plus une condition de régularité que nous désignerons par $(\mathscr{R})$, alors l'opérateur $H(a)$ est à résolvante compacte.

Si $\nu = 2$, il est immédiat de vérifier que la condition $(\mathscr{R})$ est satisfaite pour tout champ magnétique tendant vers l'infini à l'infini.

Nous donnons un exemple de champ magnétique dans R^ν ($\nu \geqslant 3$) tendant vers l'infini à l'infini et tel que l'opérateur $H(a)$ associé ne soit pas à résolvante compacte.

Dans le paragraphe 1, nous construisons un tel champ magnétique dans R^3 puis nous adaptons l'exemple dans le second paragraphe pour qu'il fournisse un champ magnétique dans R^ν possédant la propriété requise.

Enfin dans le troisième paragraphe, nous donnons un énoncé qui montre que si la différentielle du champ magnétique n'est pas trop grande par rapport au module de B, l'opérateur $H(a)$ est à résolvante compacte [la démonstration de ce résultat est inspirée de celle du théorème de Avron, Herbst et Simon déjà cité].

Je tiens à remercier Y. Colin de Verdière de m'avoir intéressé à cette question.

§1. Construction d'un champ magnétique dans R^3. Dans ce paragraphe, on identifie de la manière habituelle les 1-formes différentielles, ainsi que les 2-formes différentielles à des champs de vecteurs en utilisant la structure euclidienne de R^3; on appelle potentiel-vecteur a associé à B un champ a tel que $\nabla \times a = B$. On dit aussi que B dérive du potentiel-vecteur a.

1ère étape

Le point de départ de la construction est l'obtention d'un champ magnétique dont la direction est très "irrégulière".

Received February 9, 1983.
Durant son séjour à l'Université de Montréal, l'auteur a reçu une aide financière de l'O.T.A.N.