Vol. 49, No. 4 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © December 1982

ASYMPTOTIQUE DES NIVEAUX D'ÉNERGIE POUR DES HAMILTONIENS A UN DEGRE DE LIBERTÉ

B. HELFFER ET D. ROBERT

Introduction. Dans son livre classique ([10]), E. C. Titchmarsh a donné les deux premiers termes du développement asymptotique du $E_j^{3/4}$, lorsque j tend vers l'infini, où E_j désigne le $j$ième- niveau d'énergie du problème:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u + x^4 \cdot u = E \cdot u \\ u \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases} \tag{1}$$

Par une autre méthode, V. P. Maslov ([6]) a calculé les trois premiers termes de $E_j^{3/4}$. Dans [11] A. Voros a donné un développement implicite pour $E_j^{3/4}$. Nous nous proposons ici d'étendre et de préciser ces résultats en utilisant les résultats généraux établis dans notre précédent travail ([4]). Par exemple nous obtenons le développement asymptotique de $E_j^{(k+l)/2kl}$ où E_j est le $j$ième-, niveau d'énergie du problème:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^{2k}}{dx^{2k}}u + x^{2l} \cdot u + p(x)u = E \cdot u \\ u \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases} \tag{2}$$

où k, l sont des entiers $\geqslant 1$ et p est un polynôme à coefficients réels de degré $\leqslant 2l - 1$. Notons que dans [4] nous avons établi ce résultat pour des problèmes du type (2) en imposant des restrictions supplémentaires sur le polynôme p.

Signalons, pour terminer cette introduction, qu'un certain nombre d'articles de Physique-Mathématique ont traité numériquement les niveaux d'énergie des oscillateurs anharmoniques: $-(d^2/dx^2) + x^2 + \lambda \cdot x^4$, $\lambda > 0$ (Cf [1], [2], [5] et [9]). Pour les physiciens, ces hamiltoniens fournissent des modèles simples mais non triviaux en théorie quantique des champs.

1. Préparation. On se donne deux entiers $k, l \geqslant 1$.

Posons $m = k + 1$. Soit M un réel > 0. On se donne un symbole réel: $p \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \backslash 0)$ vérifiant:

$$p \sim p_M + p_{M-1} + \cdots + p_{M-j} + \cdots \tag{3}$$

Received June 2, 1982.