Vol. 49, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1982

EQUATION DE LEWY—RÉSOLUBILITÉ GLOBALE DE L'ÉQUATION $\partial_b u = f$ SUR LA FRONTIÈRE DE DOMAINES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES DE $\mathbf{C}^2$ (OU $\mathbf{C}^n$).

JEAN PIERRE ROSAY

Mon but est d'une part d'étendre (au moins pour les formes à coefficients $\mathcal{C}^\infty$) certains résultats connus sur la résolubilité globale de l'équation $\partial_b u = f$ (Greiner–Kohn–Stein [4] dans le cas de la boule, Henkin [5] pour les domaines strictement pseudo-convexes), mais d'autre part et surtout d'en présenter une démonstration différente qui constitue un exercice très simple dans la théorie dite du problème de $\bar\partial$ Neumann. Le travail de Henkin cité repose sur les représentations intégrales, celui de Kohn–Greiner–Stein sur l'étude du Laplacien tangentiel $\square_b$.

Pour plus de clarté, j'ai choisi de rédiger la démonstration seulement pour les domaines de $\mathbf{C}^2$, en indiquant brièvement en II comment s'opère la généralisation à $\mathbf{C}^n$. En II on trouvera également quelques commentaires qui pourraient servir d'introduction à un lecteur non initié, et un retour sur [8].

Je me suis volontairement limité à la considération du cas $\mathcal{C}^\infty$.

I. L'équation $\partial_b u = f$ dans $\mathbf{C}^2$. Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{C}^2$, à frontière $\mathcal{C}^\infty$, (faiblement) pseudo-convexe défini par la condition $\rho < 0$, où ρ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont le gradient ne s'annule en aucun point de $b\Omega$, la frontière de Ω. On note $\bar\Omega$ la fermeture de Ω et $\mathcal{C}^\infty(\bar\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}^k(\bar\Omega)$) l'espace des fonctions indéfiniment (resp. k fois continument) différentiables sur $\bar\Omega$; $H^2(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrable sur Ω (espace de Bergman). Soit f une $(1,0)$ forme dont les coefficients sont définis et $\mathcal{C}^\infty$ sur $b\Omega$. Si il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega)$ tel que $\partial_b u = f$ c'est-à-dire tel que $\partial u \wedge \partial\rho = f \wedge \partial\rho$ sur $b\Omega$, alors:

$$\int_{b\Omega} \bar\Phi(\zeta) f(\zeta) \wedge d\bar\zeta_1 \wedge d\bar\zeta_2 = 0 \qquad \text{pour toute fonction } \phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega) \text{ dont la restriction à } \Omega \text{ est holomorphe.} \tag{H}$$

Cette condition, une sorte d'orthogonalité aux $(2,0)$ formes holomorphes, a été mise en évidence et étudiée dans $\mathbf{C}^n$ par G. M. Henkin [5]. Voir aussi [10] et [11].

PROPOSITION 1. (H) *est une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega)$ vérifiant $\partial_b u = f$.*

Received June 19, 1981. Revision received November 13, 1981.