

UNICITE FORTE A PARTIR D'UNE VARIETE
DE DIMENSION QUELCONQUE
POUR DES INEGALITES DIFFERENTIELLES
ELLIPTIQUES

S. ALINHAC AND N. LERNER

Dans ce travail, nous présentons un théorème d'unicité pour des solutions d'équations aux dérivées partielles (ou d'inégalités différentielles), astreintes à s'annuler à l'ordre infini sur une sous-variété donnée V , de dimension quelconque. Ce théorème étend les résultats obtenus par Alinhac et Baouendi [2] dans le cas où V est un point, et ses hypothèses relient la partie imaginaire de l'opérateur P considéré à la géométrie de V .

Nous montrons également, par la construction de contre-exemples, que les hypothèses, " P elliptique" et " P réel sur le fibré conormal de V " (qui est nécessaire d'après Alinhac [1]), ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution.

I. Les résultats principaux. Soit, dans \mathbb{R}^n , au voisinage de l'origine, une sous-variété V de classe C^∞ , ($0 \in V$), de dimension k ($0 \leq k \leq n$). Notons $d(x)$ la distance de x à V , définie pour x voisin de 0; rappelons qu'une fonction $u(x)$, de classe C^∞ , est dite plate sur V lorsque $D_x^\alpha u = 0$ sur V , pour tout multi-indice α .

Enfin, nous dirons qu'un opérateur $K(x, D_x)$ du second ordre, à coefficients réels et C^∞ , est tangent à V s'il s'écrit

$$K(x, D_x) = \sum_{i,j} K_{ij}(x) Z_i Z_j,$$

aux termes d'ordre inférieur ou égal à un près, les Z_i étant des champs réels C^∞ tangents à V .

Nous pouvons énoncer notre premier résultat.

THÉORÈME 1. *Soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel du second ordre à coefficients complexes de classe C^∞ , défini dans un voisinage de l'origine. Nous supposons que (i) $\operatorname{Re} P$ est elliptique. (ii) $\operatorname{Im} P$ est tangente à V . Si $u \in C^\infty$ est plate sur V et telle que, pour $C_0(u) \geq 0$, on ait:*

$$|(Pu)(x)| \leq \frac{C_0(u)}{|\log d(x)|} \left\{ \frac{|\nabla u|(x)}{d(x)} + \frac{|u|(x)}{d(x)^2} \right\}, \quad (1.1)$$

alors $u \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine.

Received May 8, 1980.