Vol. 47, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1980

HYPOELLIPTICITE ANALYTIQUE SUR DES GROUPES NILPOTENTS DE RANG 2

GUY METIVIER

1. Introduction. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité analytique pour des opérateurs homogènes invariants à gauche sur certains groupes nilpotents de rang 2, généralisant la situation des groupes de Heisenberg pour lesquels les résultats découlent essentiellement des travaux de D. S. Tartakoff [18].

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent de rang 2 dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet la décomposition:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$$

avec

$$[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1] \subset \mathcal{G}_2, \qquad [\mathcal{G}, \mathcal{G}_2] = 0.$$

On demandera à G de satisfaire l'hypothèse:

(H) pour tout $\eta \in \mathcal{G}_2^* \backslash 0$ la forme bilinéaire antisymétrique $B_\eta(X, X') = \langle \eta, [X, X'] \rangle$ est non dégénérée sur $\mathcal{G}_1$.

On identifie $\mathcal{G}$ aux champs de vecteurs invariants à gauche sur G, et l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ aux opérateurs différentiels invariants à gauche. On munit $\mathcal{G}$ (et G) des dilatations usuelles δ_λ ($\lambda > 0$):

$$\delta_\lambda X = \lambda^j X \qquad \text{pour } X \in \mathcal{G}_j \ (j = 1, 2).$$

δ_λ se prolonge à $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et on désigne par $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ le sous-espace des opérateurs homogènes de degré $m \in \mathbf{N}$.

On notera $\hat{G}$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires irréductibles non triviales de G; comme d'habitude, on notera assez souvent de la même manière une représentation π et sa classe dans $\hat{G}$.

Enfin, rappelons que l'on dit que P est hypoelliptique analytique sur G si pour tout $\omega \subset \subset G$ et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\omega)$, u est analytique sur ω dès que Pu l'est.

On a alors:

THEOREME. *Soit G comme ci-dessus vérifiant l'hypothèse* (H) *et soit $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. Il y a équivalence entre*:

(i) *P est hypoelliptique analytique*

(ii) *P est hypoelliptique* (C^∞)

Received September 12, 1979.