Vol. 46, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1979

SUR L'EXISTENCE LOCALE DE CERTAINES METRIQUES RIEMANNIENNES PLATES

JACQUES GASQUI

F. J. Murray a posé le problème suivant: étant données n fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur R^n, à valeurs réelles, existe-t-il un corepère orthonormé $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ dans R^n muni de sa métrique Euclidienne standard g_0, tel que la métrique riemannienne

$$g = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}\omega_i^2$$

soit plate?

Dans le cas où les λ_i sont toutes égales à une même fonction λ, g est une métrique conforme à g_0 et l'on sait quelles conditions il faut imposer à λ pour que g soit plate: par exemple, en dimension 2, il faut et il suffit que λ soit harmonique. Nous allons donner ici une réponse au problème dans une situation diamétralement opposée en prouvant le

THEOREME. *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *des fonctions analytiques réelles de* R^n *dans* R *telles que* $\lambda_i(0) \neq \lambda_j(0)$ *si* $i \neq j$. *Il existe un corepère orthonormé analytique réel* $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ *dans* (R^n, g_0), *défini au voisinage de l'origine et tel que la métrique riemannienne*

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}\omega_i^2$$

soit plate.

Nous utilisons la théorie formelle des équations non-linéaires surdéterminées de H. Goldschmidt [6]. Le système d'équations aux dérivées partielles R_2 d'ordre 2 que l'on a à résoundre n'est pas involutif et il nous faut montrer directement l'existence de solutions en calculant explicitement, pour tout $l \geqslant 0$, les obstructions au relèvement d'une solution formelle d'ordre $l+2$ de cette équation en une solution formelle d'ordre $l+3$. Notre résultat ne pourrait donc pas s'obtenir en appliquant la théorie d'Elie Cartan sur les systèmes différentiels extérieurs. La convergence résulte d'un théorème de Malgrange [9] sur les solutions formelles fortement prolongeables d'une équation différentielle analytique. Signalons aussi que nos calculs d'obstructions montrent en fait que le symbole de R_2 est 2-acyclique: à notre connaissance, c'est l'un des rares

Received July 6, 1978.