Vol. 44, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL© September 1977

CALCULS DE DIMENSIONS DE HAUSDORFF

JACQUES PEYRIÈRE

Ce travail est divisé en trois parties. D'abord, généralisant un résultat de P. Billingsley ([1] p. 144) on donne un procédé de calcul de la dimension de Hausdorff des ensembles linéaires, ensuite on utilise ce procédé pour évaluer la dimension d'ensembles définis par des propriétés de certains développements en séries, enfin on montre un résultat en relation avec le modèle de turbulence de B. Mandelbrot [4], [3].

1. Dimension de Hausdorff des ensembles linéaires.

1.1 On note **T** l'espace compact **R/Z**, on l'identifiera souvent, comme ensemble, à l'intervalle [0,1[. La mesure de Lebesgue d'un intervalle I de **T** sera notée $|I|$.

Soient $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles de **T** et μ une mesure de Radon positive sur **T**. Si E est une partie de **T** et ϵ un nombre strictement positif on appelle $(\epsilon, \mathcal{F}, \mu)$-recouvrement de E tout recouvrement de cet ensemble par des éléments de $\mathcal{F}$ de μ-mesures inférieures à ϵ. Pour tout nombre strictement positif α on pose

$$H^{\alpha}_{(\epsilon,\mathcal{F},\mu)}(E) = \inf \sum (\mu(I_j))^{\alpha},$$

cette borne inférieure étant prise pour tous les $(\epsilon, \mathcal{F}, \mu)$-recouvrements $\{I_j\}$ de E. $H^{\alpha}_{(\epsilon,\mathcal{F},\mu)}(E)$ est une fonction décroissante de ϵ, on pose

$$H^{\alpha}_{\mathcal{F},\mu}(E) = \lim_{\epsilon \to 0} H^{\alpha}_{(\epsilon,\mathcal{F},\mu)}(E),$$

c'est un élément de $[0, +\infty]$.

Si $H^{\alpha}_{\mathcal{F},\mu}(E)$ est fini, $H^{\beta}_{\mathcal{F},\mu}(E)$ est nul lorsque β est strictement supérieur à α. On pose

1.1.1. $$\dim_{\mathcal{F},\mu}(E) = \inf \{\alpha > 0; H^{\alpha}_{\mathcal{F},\mu}(E) = 0\}.$$

Si l'on omet l'indice μ, c'est que cette construction a été faite en utilisant la mesure de Lebesgue, si l'indice $\mathcal{F}$ manque c'est que la famille d'intervalles utilisée est constituée de tous les intervalles de **T**. Avec ces notations dim E est la dimension de Hausdorff de l'ensemble E.

1.1.2. Dorénavant nous utiliserons des familles $\mathcal{F}$ ayant les propriétés suivantes:

Received January 10, 1977