Vol. 44, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL© June 1977

QUELQUES CONDITIONS POUR L'EXISTENCE DE FONCTIONS PICS DANS DES DOMAINES PSEUDOCONVEXES

MONIQUE HAKIM ET NESSIM SIBONY

1. Introduction.

Soit D un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbf{C}^n$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. On notera $A(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans D et continues dans $\bar{D}$. Rappelons qu'on appelle fonction pic de classe $\mathcal{C}^k$ en $z_0 \in \partial D$ une fonction $f \in A(D) \cap \mathcal{C}^k(\bar{D})$ telle que $f(z_0) = 1$ et $|f(z)| < 1$ pour $z \in \bar{D} - \{z_0\}$.

Si z_0 est un point de stricte pseudoconvexité, on sait [3; 6] qu'il existe une fonction pic de classe $\mathcal{C}^\infty$ en z_0. Mais si la forme de Lévi dégénère même en ce seul point, il n'existe déjà plus nécessairement de fonction pic de classe $\mathcal{C}^1$ (voir [2] pour un contre-exemple dû à J. E. Fornaess). On ne connaît toujours pas de contre-exemple pour les fonctions pic continues.

La question se pose donc dans le cas où la forme de Lévi dégénère en un point du bord de savoir reconnaître si oui ou non il existe une fonction pic en ce point. Remarquons que la question est purement locale. En effet, si on sait trouver pour un voisinage V de z_0 une fonction $f \in A(V \cap D) \cap \mathcal{C}^k(V \cap \bar{D})$ qui ait un pic en z_0, on peut par un procédé classique (voir remarques finales) en trouver une qui soit dans $A(D) \cap \mathcal{C}^k(\bar{D})$.

Nous étudions ici quelques critères permettant de répondre plus facilement à la question de l'existence d'un tel pic local pour un domaine quelconque à bord $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{C}^n$ et en un point de type fini.

2. Une condition necessaire pour l'existence d'un pic local.

Notations. Soit D un domaine de $\mathbf{C}^{n+1}$ et soit p un point du bord. On représente un point de $\mathbf{C}^{n+1}$ par des coordonnées (z, w) où $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et $w \in \mathbf{C}^n$ et on suppose que les coordonnées ont été choisies en sorte que p soit l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ et que D soit défini au voisinage de 0 par

$$\rho(z, w) = \operatorname{Re} w + \varphi(z, w) < 0 \tag{2.1}$$

avec φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'ordre supérieur ou égal à 2 à l'origine. Le plan tangent en 0 est donc $\operatorname{Re} w = 0$.

On supposera de plus dans ce qui suit que le point p est de type fini m. La notion de type d'un point sur le bord d'un domaine est due à J. J. Kohn [5] mais nous n'utiliserons ici de cette définition qu'une formulation géométrique équivalente due à T. Bloom et I. Graham [1].

Received January 28, 1977.