Vol. 43, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL© June 1976

UNE REMARQUE SUR LES ENSEMBLES DE HELSON

NICOLAS VAROPOULOS

Dans cette note on traite une question posée par G. Pisier.

Soit Λ un ensemble d'entiers $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ et $E \subset \mathbf{T}$ un sous-ensemble fermé du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$.

On note alors

$$\mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}) = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{T}); f(\theta) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda\theta}\}$$

l'espace des fonctions continues à spectre dans Λ. On note par $A(\mathbf{T})$ l'algèbre des séries de Fourier absolument sommables et par $A^+(\mathbf{T})$ l'algèbre des séries de Taylor absolument sommables (i.e. $f \in A^+(\mathbf{T}) \Leftrightarrow f \in A(\mathbf{T})$ Sp $f \subset \mathbf{Z}^+$). On note aussi par

$$I(E) = \{f \in A(E); f^{-1}(0) \supset E\}; \qquad I^+(E) = I(E) \cap A^+(\mathbf{T})$$

les idéaux associés à E et par

$$A(E) = A(\mathbf{T})/I(E); \qquad A^+(E) = A^+(\mathbf{T})/I^+(E)$$

les algèbres restrictions. Tous ces espaces et algèbres sont munis de leurs normes naturelles.

Pour une étude approfondie de ces espaces, cf. [1]. On a alors:

THEOREME 1. *Supposons que l'espace de Banach $\mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T})$ soit isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à ℓ^1, alors, Λ est une suite de Sidon, c'est-à-dire, il existe C une constante telle que*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda| \leq C\, ||f||_\infty$$

pour tout

$$f \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda e^{i\lambda\theta} \in \mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}).$$

THEOREME 2. *Supposons que $E \subset \mathbf{T}$ est tel que $A(E)$ (resp. $A^+(E)$), en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à un espace de la forme $\mathbf{C}(X)$ où X est un espace topologique compact; alors $A(E) = \mathbf{C}(E)$ (resp. $A^+(E) = \mathbf{C}(E)$), c'est-à-dire E est un ensemble de Helson.*

L'hypothèse des deux théorèmes peut s'affaiblir. Il suffit par exemple de supposer dans le théorème 2 que $A(E)$ est un espace de type $\mathcal{L}_\infty$ dans le sens de [2].

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent dans le cadre de groupes localement compacts.

La preuve des deux théorèmes est basée sur le théorème suivant [3].

Received February 3, 1976.