ETUDE D'UNE CLASSE D'APPLICATIONS LIÉES À DES HOMOMORPHISMES D'ALGEBRES DE FONCTIONS, ET GENERALISANT LES QUASI CONFORMES

JACQUELINE LELONG-FERRAND

Introduction. M, N étant deux espaces topologiques, supposons données deux algèbres de Banach $A(M)$, $B(N)$, respectivement formées de fonctions numèriques (ou complexes) continues sur M, N. Soit $\varphi : M \to N$ une application, et soit $\varphi^* : v \to v \circ \varphi$ sa transposée. Si φ^* vérifie l'inclusion $\varphi^*[B(N)] \subset A(M)$, alors φ^* est un homomorphisme d'algèbres, de $B(N)$ dans $A(M)$; et du fait que $A(M)$ est semi-simple, l'homomorphisme φ^* est continu [1; 27].

Le but de cet article est d'étudier les applications φ vérifiant une telle inclusion dans le cas où M, N sont des variétés riemanniennes, et où $A(M)$, $A(N)$ sont des algèbres de Beppo-Levi-Royden. Les principaux résultats ont été annoncés dans deux Notes aux C.R.A.S. [7] et ont fait l'objet de trois exposés oraux (Nice, Septembre 1970; Bruxelles, Décembre 1970; Bucarest, Octobre 1971).

Une étude des isomorphismes de ces algèbres, relative au cas euclidien [8] ayant paru pendant la préparation de cet article, nous nous bornerons à exposer les points véritablement nouveaux, du point de vue des méthodes ou des résultats.

Rappelons que le cas des surfaces de Riemann a été étudié par M. Nakai [11], [17].

1. Definitions et notations. Dans tout ce qui suit nous ne considérerons que des variétés riemanniennes (notées M, N) connexes (ou, du moins, dénombrables à l'infini), de classe C^1, non nécessairement compactes, et sans bord (le cas des variétés à bord pourrait se traiter par le procédé de "doublement de la variété". Ces variétés peuvent se réduire à des domaines d'un espace euclidien.

Sur chaque variété riemannienne M de dimension n, et pour chaque sytème de coordonnées locales (x^i), la métrique sera notée $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. A cette métrique nous associerons la mesure (élément de volume) $dt_M = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ et la distance géodésique $d_M(x, y)$ (borne inférieure des longueurs des arcs joignant x à y dans M).

Nous noterons $L^p(M)$ (resp. $L^p_{loc}(M)$) l'espace des fonctions numériques mesurables sur M, de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (resp. localement intégrable).

Received February 22, 1972. Revisions received November 10, 1972.